

Wstęp do matematyki R
Lista zadań nr 10 (na ćwiczenia 12.01.2026).

1. Dane są następujące relacje na zbiorze $\mathbb{N}^+$:

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) x - y = 4k, \quad xSy \Leftrightarrow x|y \vee y|x, \quad xTy \Leftrightarrow x + 3 \geq y.$$

(a) Sprawdź, czy są to relacje równoważności. Dla relacji będących relacjami równoważności opisz odpowiadające im zbiory ilorazowe.

(b) Wyznacz następujące zbiory

$$(i) \{x \in \mathbb{N}^+ : x T^{-1} 2\}, \quad (ii) \{x \in \{1, 2, \dots, 20\} : x R \cap S 3\}.$$

(c) Sprawdź, czy prawdą jest, że $2 R \circ T 7$ (czyli czy 2 jest w relacji $R \circ T$ z 7).

2. Niech $X = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| \leq 5\}$ i niech funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})$. Rozważmy relację równoważności R na X zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Wyznacz zbiór ilorazowy X/R . Wykonaj to samo polecenie dla $X = \mathbb{Z}$.

3. Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(y)$.

(a) Wyznacz $[0]_R$.

(b) Wyznacz $[1]_R$. Sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz tę klasę abstrakcji jeszcze raz, tym razem poprawnie.

(c) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{R}/R$.

4. Niech $X = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 140\}$. Rozważmy relację równoważności R na zbiorze X określoną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow (3|x \wedge 3|y \wedge x = y) \vee (3 \nmid x \wedge 3 \nmid y \wedge 2|x - y).$$

Wyznacz zbiór ilorazowy X/R . Wykonaj to samo polecenie dla $X = \mathbb{N}$.

5. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadaną warunkiem

$$fRg \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = 0 \Leftrightarrow g(n) = 0)$$

(a) Czy istnieje skończona klasa abstrakcji relacji R ? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Wyznacz $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R$.

6. Dla podanych zbiorów X i ich podziałów $\mathcal{S}$ podaj relacje równoważności (w miarę konkretnym wzorem), których zbiory ilorazowe są równe tym podziałom.

(a) $X = \mathbb{R}$; $\mathcal{S} = \{[k, k + 1) : k \in \mathbb{Z}\}$,

(b) $X = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{S}$ jest rodziną prostych postaci $y = x + b$ dla $b \in \mathbb{R}$.

7. Niech $X = [0, 10]$. Rozważmy relację równoważności R na X zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow [x, x + 1] \cap \mathbb{N} = [y, y + 1] \cap \mathbb{N}.$$

Wyznacz zbiór ilorazowy X/R .

8. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leq 6\}$. Niech funkcja $f : X \rightarrow X$ będzie dana wzorem $f(x) = \lfloor \sqrt{3x} \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x \in \mathbb{R}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ definiujemy relację równoważności R oraz relację S warunkami

$$A R B \Leftrightarrow f[A] = f[B], \quad A S B \Leftrightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B].$$

(a) Wyznacz $[\emptyset]_R$.

(b) Czy $\{3, 6\} S \circ R \{4\}$?

(c) Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(X)/R$?

9. Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2$ będzie relacją zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) x = y \cdot 2^k.$$

- (a) Udowodnij, że R jest relacją równoważności.
- (b) Wyznaczyć $[1]_R$. Odpowiedź podaj stosując opis zbioru za pomocą operacji.
- (c) Ile jest skończonych klas abstrakcji relacji R ? Odpowiedź uzasadnij.

10. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Niech S będzie relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^+$ zadaną warunkiem

$$xSy \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{P})(p|x \Leftrightarrow p|y).$$

- (a) Czy $[10]_S = [15]_S$? Odpowiedź uzasadnij.
- (b) Czy zbiór $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ jest klasą abstrakcji relacji S ? Odpowiedź uzasadnij.
- (c) Wyznacz $[6]_S$.

Wskazówka: Spróbuj **zrozumieć**, kiedy dwie liczby są ze sobą w relacji S .

11. W skrypcie z Algebry liniowej 1 dr. Elsnera jest poniższa definicja:

Definicja 1.1: Wektor (geometrycznie)

(Uporządkowaną) parę punktów płaszczyzny A i B nazywamy wektorem (na płaszczyźnie) o początku A i końcu B i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. (...) Dwa wektory są równe, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty.

z adnotacją „Pod koniec semestru, po przygotowaniu w ramach Wstępu do matematyki, będzie można lepiej sformalizować definicję wektora za pomocą pojęć *relacja równoważności* i *klasa abstrakcji*”.

Sformalizuj definicję wektora.