Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 1 (na ćwiczenia 6.03.2020)

Ćwiczenia

1. Dla poniższych zdań sprawdź, czy informacja $q = 0$ jest wystarczająca do wyliczenia wartości logicznej zdania złożonego. Jeśli tak, to wyznacz tę wartość, jeśli nie, to pokaż, że obie wartości są możliwe.
(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$;
(b) $q \wedge (p \Rightarrow r)$;
(c) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

2. Bez korzystania z tabelki oceń, czy poniższe zdania są tautologiami.
(a) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$;
(b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$;
(c) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$;
(d) $(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$;
(e) $(p \Rightarrow (\neg q \wedge q \Rightarrow r)$.

3. Niech p, q, r oznaczają pewne zdania, a p', q', r' ich negacje. Zapisz negacje poniższych zdań złożonych bez użycia symbolu negacji $\neg$ (można używać pozostałych spójników oraz p, q, r, p', q', r'). Im krótsze końcowe wyrażenie, tym lepiej.
(a) $(q \Rightarrow r \wedge p) \vee \neg r$;
(b) $\neg(p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
(c) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

4. Przekształć schemat zdaniowy $((\neg q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge r)$ do możliwie najprostszej postaci, stosując prawa rachunku zdań.

5. Niech C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważamy zdanie

Jeśli C jest trapezem, o ile jest rombem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.

(a) Zapisać schemat rozważanego zdanie symbolicznie, stosując oznaczenia:
t: C jest trapezem, k: C jest kwadratem, r: C jest rombem.
(b) Rozstrzygnij w każdym z poniższych przypadków, czy powyższe zdanie jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe, czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (w zależności od czworokąta C).
(i) C jest trapezem.
(ii) C nie jest prostokątem.
(iii) C nie jest rombem, lecz jest trapezem.

Zadania

6. Zapisz poniższe zdania symbolicznie (nie chodzi o zapisanie schematów zdaniowych!). Dla których liczb naturalnych $n = 0, 1, 2, \ldots$ zdania te są **fałszywe**?
(a) ($n + 7$ nie jest podzielne przez 4 i $n \geq 20$) pod warunkiem, że n jest liczbą dwucyfrową podzielną przez 15.
(b) To, że n jest nieparzyste jest warunkiem koniecznym do tego, że n jest parzyste.
(c) n jest mniejsze od 10, chyba że n jest większe od 7.
(d) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.

W zadaniach 7, 8 i 9 **nie należy** skupiać się wyłącznie na strukturze logicznej rozważanych zdań.

7. Zakładamy, że o pewnej liczbie naturalnej n wiemy, że

• n jest podzielna przez 4 i

•• jeśli n jest podzielna przez 2, to n jest podzielna przez 3.

Czy stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 12? Odpowiedź uzasadnić.

8. O pewnej liczbie rzeczywistej x zakładamy, że

• jeśli $x > -1$, to z faktu, że $x > 0$ wynika, że $x > 1$ oraz

•• jeśli $x \leq 1$, to $x > -1$.

Czy stąd wynika, że liczba x jest dodatnia? Odpowiedź uzasadnić.

9. Dane są trzy **różne** liczby rzeczywiste x, y, z. Wiadomo, że

• jeśli x jest większa od y, to x jest większa od z oraz

•• jeśli z jest większa od y, to x jest większa od y.

Udowodnić, że z nie jest największą z liczb x, y, z.

10. (a) Jak za pomocą tabelki schematu zdaniowego $\alpha(p,q)$ rozpoznać, czy schemat zdaniowy $p \vee q \Rightarrow \alpha(p,q)$ jest tautologią?

(b) Znajdź wszystkie (z dokładnością do równoważności) schematy zdaniowe $\alpha(p,q)$, dla których $p \vee q \Rightarrow \alpha(p,q)$ jest tautologią.

(Stwierdzenie *z dokładnością do równoważności* oznacza, że nie rozróżniamy schematów zdaniowych równoważnych, czyli takich, których równoważność jest tautologią.)

11. Ile jest różnych tautologii o zmiennych p i q?

12*. Mówimy, że schemat zdaniowy $\varphi(p,q)$ jest **spełnialny**, jeśli dla pewnych wartości logicznych zmiennych p i q jest on prawdziwy. Czy prawdziwe jest poniższe stwierdzenie?

Jeśli $\psi(p,q) \Rightarrow \varphi(p,q)$ jest tautologią oraz $\neg\varphi(p,q) \Rightarrow \psi(p,q)$ jest spełnialne, to $\varphi(p,q)$ jest spełnialne.