Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 2 (na ćwiczenia 13.03.2020)

Ćwiczenia

1. Sprawdź, które z podanych zbiorów są sobie równe:

$$A_1 = \{1,2,3,4\}, \quad A_2 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}, \quad A_3 = \{\{1,2\},\{3,4\}\},$$
$$A_4 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \quad A_5 = \{\{3,1\},\{4,2\}\}, \quad A_6 = \{1,4,3,2\},$$
$$A_7 = \{\{2,1,3,4\}\}, \quad A_8 = \{\{1,2,3\},\{4\}\}, \quad A_9 = \{\{4,3\},\{2,1\}\}.$$

2. Podaj elementy następujących zbiorów:
$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{a,b\},\{\{b,a\}\},\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset,\emptyset\}\},\{\emptyset,\emptyset,\emptyset\}\}$, $\{1,\{\emptyset\},\{1\}\}$
$\{\{\{\{1\}\}\}\}$ $\{\psi,\{\psi,\psi\},\psi,\psi,\{\psi\}\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2<7\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2<0\}$,
$\{\alpha\in\mathbb{N} : \alpha\geq 0\}$, $\{x\in\mathbb{N} : x^2=4\}$, $\{x\in\mathbb{Q} : x^2=4\}$, $\{x\in\mathbb{N} : |3-x|<3\}$,
$\{x\in\mathbb{R} : x^2+4x+4\leq 0\}$, $\{2x : x\in\mathbb{Z}\cap[-2,3)\}$, $\{2x : x\in\mathbb{Z}\}\cap[-2,3)$.

3. Korzystając z metody zapisu zbiorów wykorzystującego operację zapisz poniższe zbiory.
   (a) Zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 7.
   (b) Zbiór wszystkich kwadratów liczb naturalnych.
   (c) Zbiór potęg liczby 5 o wykładniku naturalnym.
   (d) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby $\sqrt{2}$.

4. Czy zbiory $\{1,2,x\}$ i $\{4,5,\{2\}\}$ zawsze są rozłączne/mogą być rozłączne/nigdy nie są rozłączne? Wybrać właściwą odpowiedź i uzasadnić ją.

5. Podaj przykłady parami różnych zbiorów A,B,C takich, że
   (a) $A\cap(B\setminus C)=\{2,3,4\}$
   (b) $A\triangle(B\cup C)=\{2n : n\in\mathbb{N}\}$
   (c) $(A\cup B)\setminus(B\cap C)=[0,+\infty)$
   (d) $A\setminus B=A\cup\mathbb{Q}$.

Zadania

6. Rozważmy zbiory $A,B,C\subseteq\mathbb{N}$ i zawieranie

$$(A\cap B)^c\subseteq A\cap(B\cup C).$$

   (a) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie nie zachodzi.
   (b) Podaj przykład zbiorów, dla których powyższe zawieranie zachodzi.

7. Niech $A=\{\{x\},\emptyset\}$, $B=\{\emptyset,\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\}\}$.
   (a) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A\in B$?
   (b) Jakiemu zbiorowi musi być równe x, by zachodziło $A\subseteq B$?

8. Zbiory A,B,C są podzbiorami przestrzeni X. Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe:
   (a) $x\notin A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$,
   (b) $x\in A\Rightarrow x\in B$,
   (c) $(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Leftrightarrow x\in C$.

9. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znaleźć zbiór X, dla którego zachodzi równość $(A \triangle X) \triangle B = C$.

10. Używając jedynie symboli $\{, \}, \emptyset$ zapisać dwuelementowy zbiór, rozłączny ze zbiorem $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

11. Dla danego zbioru A opisać jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$.
(a) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$, (b) $A = \{\{\alpha, \beta\}, \emptyset\}$,
(c) $A = \{\{\sigma, \tau, \rho\}\}$, (d) $A = \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$.

12. Sprawdzić, czy zachodzi zawieranie $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.
(a) $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$,
(b) $A = \{\mu, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\mu, \emptyset\}$,
(c) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^6 + 7x^5 - 3x = 0\}$,
(d) $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$,
(e) $A = \{2, \{0\}\}$, $B = \{\{x \in \mathbb{N} : 1 - x^2 > 0\}\}$.

13. Ile co najmniej elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$?