Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 3

Ćwiczenia

1. Wypisz wszystkie elementy zbiorów: $\mathcal{P}(\{1,2\}\times\{5\})$, $\mathcal{P}(\{1,2\})\times\{5\}$, $\{1,2\}\times\mathcal{P}(\{5\})$.

2. Podaj przykład pięcioelementowego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że $1 \in \pi_{\mathbb{R}}[A] = \pi^{\mathbb{R}}[A]$ i oba zbiory $\pi_{\mathbb{R}}[A], \pi^{\mathbb{R}}[A]$ są trzyelementowe. Następnie wyznacz cięcia A_1 i A^1.

3. Czy istnieje zbiór trzynastoelementowy $A \subseteq [0,1]^2$ taki, że zbiór $\pi_{[0,1]}[A]$ jest trzyelementowy, a zbiór $\pi^{[0,1]}[A]$ jest czteroelementowy? Odpowiedź uzasadnij.

4. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\} \times \{1,2\})$? Odpowiedź krótko uzasadnij.

5. Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory $A \times B$ i $B \times A$.
   (a) $A = (1,2] \cup \{3\},\ B = [1,3)$
   (b) $A = \mathbb{N},\ B = [-1,1]$.

Zadania

6. Niech zbiór $A \subseteq [0,1]^2$ będzie taki, że dla każdego $a \in [0,1]$ mamy $A_a = \left[\frac{1}{2}a, 1 - \frac{1}{2}a\right]$. Wyznacz A^b dla każdego $b \in [0,1]$.
Wskazówka: Rysunek pomoże.

7. Podaj przykład **rozłącznych** podzbiorów $A, B \subseteq [0,1]^2$ (może być rysunek, choć opis formalny mile widziany w ramach treningu) takich, że

$$\pi_{[0,1]}[A] = \pi^{[0,1]}[A] = \pi_{[0,1]}[B] = \pi^{[0,1]}[B] = [0,1].$$

Czy uda się znaleźć przykład takich zbiorów, jeżeli dodatkowo będziemy wymagać, by istniały takie $a, b \in [0,1]$, że $A_a = B^b = [0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

8. Niech $X = \{0,1,2,3,4,5\}$. Zdefiniujmy $A \subseteq \mathcal{P}(X) \times P(X)$ w następujący sposób:

$$\langle C, D\rangle \in A \Leftrightarrow C \subseteq D.$$

Wyznacz zbiory $A_\emptyset, A^\emptyset, A_{\{0,1,2\}}$ i $A^{\{0,1,2\}}$.

9. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge |x-1| \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 9\}$.
   (a) Wyznaczyć zbiór $(B \setminus A) \times \mathcal{P}(A \setminus B)$.
   (b)* Czy istnieje niepusty zbiór $X \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że $A \times X = X \times B$? Odpowiedź uzasadnij.

10. Rozważmy zbiór $A = ([1,3] \times (2,5]) \cup ([2,4] \times (1,3))$. Ile elementów ma zbiór $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$? Odpowiedź uzasadnij.
Wskazówka: Rysunek i zrozumienie pytania niezbędne.