Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 4

Ćwiczenia

1. Podaj przykład dwóch różnych elementów zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})) \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2. Podaj przykład takich niepustych zbiorów $A, B, C \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$, że

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B.$$

3. Czy istnieją zbiory A, B i C takie, że

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \text{i} \quad A \cap C = \emptyset \quad \text{i} \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Odpowiedź uzasadnić.

4. Niech Ω będzie przestrzenią, a zbiory A, B i C podzbiorami tej przestrzeni. Niech

$$X = \{x \in \Omega : x \in A \vee (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}.$$

Wyrazić zbiór X^c przy pomocy zbiorów A, B i C oraz operacji $\cup, \cap, {}^c$.

5. Narysuj w układzie współrzędnych następujące zbiory:
   (a) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sin x\}$,
   (b) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$,
   (c) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$,
   (d) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x + \cos y < \pi\}$,
   (e) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x = \cos y \Leftrightarrow \cos y = \sin x\}$,
   (f) $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } t \in \mathbb{N} \text{ takie, że } x + t < y\}$.

Zadania

6. Niech $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$. Wypisz wszystkie zbiory X takie, że $X \cap A = X \setminus B$.

7. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą poniższe równości. Jeśli tak – udowodnić, jeśli nie – podać odpowiednie przykłady.
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
   (c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$,
   (d) $(A \cap B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$.

8. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D mamy

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \setminus D \subseteq B \setminus C.$$

9. O zbiorach $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że:
   (a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
   (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
   (c) $A \cap C = \emptyset$?

Odpowiedzi uzasadnić.

10. Czy dla dowolnych **niepustych** zbiorów A, B i C prawdziwe są zależności
   (a) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
   (b) $A \not\subseteq B \times C$?

Odpowiedzi uzasadnić.

11. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B prawdą jest, że
(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
Podaj przykład zbiorów, dla których w podpunkcie (b) zachodzi zawieranie właściwe.

12. Czy dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$? Odpowiedź uzasadnić.

13. Niech A, B, C i D będą zbiorami niepustymi. Czy z faktu $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ wynika, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$? Odpowiedź uzasadnić.
Wskazówka: Dobry rysunek może pomóc.