Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 5

Ćwiczenia

1. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, używając odpowiednich oznaczeń:
(a) Każdy student, który przyszedł na egzamin, jest przygotowany. (Przykładowe oznaczenia: S – zbiór studentów, $e(x) - x$ przyszedł na egzamin, $p(x) - x$ jest przygotowany)
(b) Na egzamin przyszli tylko przygotowani studenci.
(c) Żaden student, którzy przyszedł na egzamin, nie był przygotowany.
(d) Na egzamin przyszedł student.
(e) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszka przynajmniej jedna osoba. (Przykładowe oznaczenia: M – zbiór mieszkań w tym bloku, O – zbiór osób, $m(x,y) - x$ mieszka w y)
(f) W pewnym mieszkaniu w tym bloku nikt nie mieszka.
(g) Każdy człowiek zna człowieka, który nie zna człowieka, który nikogo nie zna. (Przykładowe oznaczenia: L – zbiór ludzi, $z(x,y) - x$ zna y.)
(i) Pewne trzy osoby nie znają się wzajemnie.
(j) Nie wszyscy ludzie znają wszystkich, którzy ich znają.

2. Znaleźć zmienne występujące jako wolne i związane w poniższych wyrażeniach. Niektóre z tych wyrażeń są zapisane w sposób, którego należy unikać. Jak to poprawić?
(a) $(\forall x\,(x > 3)) \Rightarrow y < 5$;
(b) $\exists x \forall y\,(x > 3 \Rightarrow y < 5) \Rightarrow \forall x\,(x \neq 7)$;
(c) $\forall x \forall y\,(x + y = z) \wedge \exists z\,(x - y \neq z)$;
(d) $\forall x\,(x + y = z) \Rightarrow \exists z\,(\exists y\,(x - y \neq z) \wedge \forall z\,(x \cdot y \geq z))$.

3. Zanegować poniższe wyrażenia (tzn. zapisać ich negacje bez użycia symbolu negacji).
(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\, x < q < y)$;
(b) $\exists x(x < 3 \vee \forall y(y > x \Rightarrow y \geq 3))$.

4. Ocenić prawdziwość poniższych zdań (warto zrozumieć ich znaczenie) i krótko uzasadnić odpowiedź.
(a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x = 2y$; (b) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$;
(c) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\, x = 2y$; (d) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x = 2y$;
(e) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\, x = 2y$; (f) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$.

Zadania

5. Zapisać formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe. Poza zmiennymi i stałymi wolno używać **tylko** symboli logicznych, symboli równości, różności, nierówności, symboli operacji arytmetycznych oraz symboli należenia i zawierania.
(a) Jeśli liczby rzeczywiste x i y są różne, to albo x jest mniejsze od y, albo y jest mniejsze od x.
(b) Nie każda liczba parzysta jest podzielna przez 8.
(c) Jeśli kwadrat liczby rzeczywistej x nie jest liczbą dodatnią, to x jest zerem.
(d) Nie wszystkie liczby naturalne większe od 5 są nieparzyste.
(e) Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma niepusty podzbiór właściwy.
(f) Nie istnieje największa liczba rzeczywista.
(g) Zbiór A ma dokładnie dwa elementy.
(h) Zbiór A ma przynajmniej dwa elementy.
(i) Zbiór A ma co najwyżej dwa elementy.

(j) Żaden element zbioru A, który nie jest elementem zbioru B, nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.
(k) x jest sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych.
(l) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.
Które z tych wyrażeń są zdaniami? Które są prawdziwe?

6. Niech $D = \{1, 2, 7, 13, 19, 24\}$. Czy poniższe zdania sa prawdziwe? Podaj krótkie uzasadnienia.
(a) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in D) k \leq n$.
(b) $(\forall n \in D)(n > 3 \Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) n = 2k + 1)$.

7. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in A) k < n$,
- $(\forall n \in A)(\exists k \in A) k < n$.

8. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{Z}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki:

- $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall k \in \mathbb{Z})(n < k \Longrightarrow k \in A)$,
- $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists k \in \mathbb{Z})(k < n \wedge k \notin A)$,
- $-100 \in A$.

9. Zapisz poniższe zdania i funkcje zdaniowe prozą, w języku potocznym.
(a) $(\forall x) x \notin A$
(b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in A) n \leq x$
(c) $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists m \in \mathbb{Z}) m < n$
(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + y = y$
(e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 0$
(f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0)$
(g) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge y^2 - 3y + 1 = 0 \wedge x \neq y)$
(h) $(\exists n \in \mathbb{N})((\exists k \in \mathbb{N}) n = 2k + 1 \wedge (\exists k \in \mathbb{N}) n = 3k)$

Uwaga do zadań 10. i 11.: Proszę najpierw zrozumieć znaczenie tych zdań formalnych, wtedy znalezienie przykładów nie powinno być trudne. Bo – jak zawsze powtarzam – te znaczki zawsze coś znaczą...

10. Podać przykłady funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{R}$, pokazujące że zdanie formalne
(a) $(\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x)$,
(b) $(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x) \Rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$,
(c) $(\exists x)(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$.
nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów.

11. Podać przykład funkcji zdaniowej $\varphi(x, y)$ o zakresie zmiennych $x, y \in \mathbb{N}$, pokazujący że zdanie formalne
(a) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$,
(b) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi(x, y)$,
(c) $(\exists x)(\forall y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$,
(d) $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\forall y)\varphi(y, y)$,
(e) $(\exists x)\varphi(x, x) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\varphi(x, y)$,
(f) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x, x)$.
nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów.