# Wstęp do matematyki (lato 2020)

## Lista zadań nr 6

### Zadania

Ważna uwaga wstępna: należy zrozumieć różnicę pomiędzy zadaniem 5 z listy 5 a poniższymi zadaniami. W tamtym zadaniu mieliśmy wyrażenia będące zdaniami oraz funkcjami zdaniowymi niebędącymi zdaniami i należało rozróżniać te sytuacje. W szczególności niedopuszczalne było dopisywanie kwantyfikatora kwantyfikującego np. po $x$, gdy mieliśmy do czynienia z funkcją zdaniową zmiennej $x$.

Natomiast w zadaniach z tej listy mamy do czynienia z **twierdzeniami** (prawdziwymi bądź fałszywymi), co jest jasno zadeklarowane. Twierdzenie **zawsze** jest zdaniem. Jeżeli jego sformułowanie wygląda jak funkcja zdaniowa (pojawiają się zmienne, które wydają się być zmiennymi wolnymi), to oznacza, że na początku są domyślne kwantyfikatory ogólne – wszystkie zmienne wyglądające na wolne są kwantyfikowane ogólnie. Zatem np. *twierdzenie* „Jeżeli $x$ jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” jest tożsame z *twierdzeniem* „Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ zachodzi $-x^2 + 2x - 1 < 10$.” (czego oczywiście nie moglibyśmy powiedzieć, gdybyśmy nie mieli tej dodatkowej informacji, że mamy do czynienia z twierdzeniami).

1. Udowodnij następujące twierdzenia, zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzyście sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

(a) Jeżeli $x$ jest liczbą rzeczywistą, to $-x^2 + 2x - 1 < 10$.

(b) Jeżeli $s$ i $t$ są liczbami wymiernymi i $t \neq 0$, to liczba $\frac{s}{t}$ jest wymierna.

(c) Jeżeli $a, b$ i $c$ są liczbami całkowitymi oraz $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(d) Jeżeli $n$ i $m$ są nieparzystymi liczbami naturalnymi, to $n \cdot m$ jest nieparzystą liczbą naturalną.

(e) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Wtedy liczba $11x - 7$ jest nieparzysta dokładnie wtedy, gdy liczba $x$ jest parzysta.

(f) Istnieje jedyna liczba całkowita $x$ taka, że $x^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x$.

(g) Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 2$ istnieje taka liczba rzeczywista $y$, że

$$y = \frac{x}{2 - x}.$$

(h) Jeśli $a, b, c$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a + b + c$ jest podzielne przez 3.

(i) Jeśli $a, b, c$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, to $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ jest podzielne przez 3.

(j) Jeśli prosta $p$ jest równoległa do $q$, a prosta $q$ jest równoległa do $r$, to $p$ jest równoległa do $r$.

2. Udowodnij lub obal poniższe twierdzenia (staraj się jednak nie wykonać obydwu poleceń naraz), zapisując je wcześniej symbolicznie. Postaraj się przejrzyście sformułować krótki dowód. W każdej sytuacji oceń, czy mamy do czynienia z sytuacją ogólną, czy szczegółową.

(a) Niech $A$ będzie zbiorem. Jeśli $A \cap B = \emptyset$ dla dowolnego zboru $B$, to $A = \emptyset$.

(b) Dla każdego niepustego zbioru $A$ istnieje zbiór $B$ taki, że $A \cup B = \emptyset$.

(c) Każda liczba całkowita nieparzysta jest sumą trzech liczb całkowitych nieparzystych.

(d) Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wtedy przynajmniej jedna z liczb $a + b, a + c$ i $b + c$ jest parzysta.

(e) Niech $A, B, C$ będą zbiorami. Jeśli $A \setminus B = A \setminus C$, to $B = C$.

(f) Istnieją trzy różne liczby całkowite $a, b, c$ takie, że $a^b = b^c$.

(g) Dla każdej liczby naturalnej $x$ istnieje liczba naturalna $y$ taka, że $x < y < x^2$.

(h) Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną.

(i) Niech $x \in \mathbb{Z}$. Jeśli $3 \nmid (x^2 - 1)$, to $3 \mid x$.

(j) Dla każdej dodatniej liczby wymiernej $b$ istnieje liczba niewymierna $a$ taka, że $0 < a < b$.

3. Oceń poniższy dowód:
**Twierdzenie:** Każda parzysta liczba całkowita jest sumą dwóch nieparzystych liczb całkowitych.
**Dowód:** Załóżmy, że $x$ i $y$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Wówczas $x = 2k + 1$ i $y = 2l + 1$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. Wobec tego $x + y = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$. Ponieważ $k+l+1$ jest liczbą całkowitą, więc liczba $x+y$ jest parzysta, co kończy dowód. □

4. Oceń poniższy dowód:
**Twierdzenie:** Jeśli $x$ jest liczbą niewymierną, a $y$ liczbą wymierną, to $z = x - y$ jest liczbą niewymierną.
**Dowód:** Przypuśćmy nie wprost, że liczba $z = x - y$ jest wymierna. Wobec tego $z = \frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, więc niech $x = \sqrt{2}$. Skoro $y \in \mathbb{Q}$, to $y = \frac{c}{d}$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Zatem

$$\sqrt{2} = x = y + z = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ponieważ $ad + bc$ i $bd$ są liczbami całkowitymi i $bd \neq 0$, więc $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, sprzeczność. □

5. Rozważmy następujący dowód:
**Dowód:** Załóżmy, że $n$ jest nieparzystą liczbą całkowitą. Wtedy $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$3n - 5 = 3(2k + 1) - 5 = 6k + 3 - 5 = 6k - 2 = 2(3k - 1).$$

Ponieważ liczba $3k - 1$ jest całkowita, więc liczba $3n - 5$ jest parzysta.

Które z poniższych stwierdzeń zostało dowiedzione:
(a) Liczba $3n - 5$ jest parzysta.
(b) Jeśli $n$ jest nieparzystą liczbą całkowitą, to liczba $3n - 5$ jest parzysta.
(c) Niech $n$ będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest parzysta, to liczba $n$ jest nieparzysta.
(d) Niech $n$ będzie liczbą całkowitą. Jeśli liczba $3n - 5$ jest nieparzysta, to liczba $n$ jest parzysta.

6. Używając symbolu sumy uogólnionej zapisz zbiory rozwiązań poniższych nierówności.
   (a) $\operatorname{tg}(x) \geqslant 1$
   (b) $\cos(x) > 0$.

7. Dla podanych rodzin indeksowanych $\{A_i : i \in I\}$ wyznaczyć $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ oraz $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.
   (a) $I = \mathbb{N}, \qquad A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leqslant x\};$
   (ą) $I = \mathbb{Z}, \qquad A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leqslant x\};$
   (b) $I = \mathbb{N}, \qquad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i+1} \leqslant x \leqslant 2 + \frac{1}{i+1}\right\};$
   (c) $I = \mathbb{N}^+, \qquad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leqslant x < i + \frac{1}{i}\right\};$
   (d) $I = \mathbb{N}^+, \qquad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i} \leqslant x < 2 - \frac{1}{i^2}\right\};$
   (e) $I = \mathbb{N}^+, \qquad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 3 + \frac{(-1)^i}{i} \leqslant x < 2i - \frac{(-1)^i}{i}\right\};$
   (f) $I = \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}, \qquad A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-(-1)^i}{2i} \leqslant x < i - 1 - \frac{1}{i^2}\right\};$
   (g) $I = (0, +\infty), \qquad A_i = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant i \cdot x\};$
   (h) $I = (0, +\infty), \qquad A_i = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant i \cdot x^2\}.$

8. Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right)$$

a następnie

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right) \text{ oraz } \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(k - \frac{n}{2}, k + \frac{n}{2}\right).$$