Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 7

Ćwiczenia

1. Rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i ciąg liczb rzeczywistych $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Zapisać następujące zdania.
(a) Funkcja f jest ograniczona.
(b) Żadna wartość funkcji g nie jest miejscem zerowym funkcji f.
(c) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których funkcja g jest większa od funkcji f.
(d) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny.
(e) Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$.
(f) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest dodatnich.
(g) Od pewnego miejsca ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący.
(h) Każdy wyraz ciągu $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest wartością funkcji f.

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zapisać symbolicznie poniższe zbiory.
(a) Zbiór miejsc zerowych funkcji f.
(b) Zbiór okresów funkcji f. (Uwaga! Okres funkcji jest **dodatnią** liczbą rzeczywistą)
(c) Zbiór ograniczeń górnych funkcji f.

3. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Zapisać symbolicznie **negacje** poniższych zdań (bez użycia symbolu negacji $\neg$).
(a) Liczba 4 jest największą wartością funkcji f.
(b) Dla pewnych argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 4.

4. Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie bijekcją. Udowodnić, że $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

5. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = |x|$. Dla każdego z poniższych podpunktów wskaż (jakąkolwiek) liczbę rzeczywistą t, dla której funkcja zdaniowa staje się zdaniem prawdziwym (lub zaznacz, że takiej nie ma). Podaj krótkie uzasadnienie (np. można opisać słownie znaczenie danych wyrażeń).
(a) $(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \neq t$
(b) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(x \neq t \wedge f(x) = f(t))$
(c) $(\exists x > 2)\, f(x) < t \wedge (\exists x < 10)\, f(t) < x$
(d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, f(x) = f(y) > t$.

Zadania

6. Dla podanych poniżej funkcji sprawdzić, czy są różnowartościowe i czy są „na". Odpowiedzi uzasadnić.
(a) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; \quad f(n, k) = n + k,$
(b) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}; \quad f(n, k) = n^2 - k,$
(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2; \quad f(n) = \langle 2n, -2n \rangle,$
(d) $f : [0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2; \quad f(\alpha, r) = \langle r \cos\alpha, r \sin\alpha \rangle,$
(e) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}; \quad f(n, k) = (n - 2)2^k,$
(f) $f : (\mathbb{N}^+)^2 \to \mathbb{N} \quad f(n, k) = (n - 1)(k + 1),$
(g) $f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}); \quad f(A, B) = A \setminus B.$

7. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ daną wzorem $f(n,k) = n^2 + k^2$. Podać przykład nieskończonego zbioru $C \subseteq \mathbb{N}^2$, takiego że funkcja $f \restriction C$ jest różnowartościowa. Odpowiedź uzasadnić.

8. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{jeśli } x < 0 \\ x-2 & \text{jeśli } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Wyznacz funkcję $f \circ f$.

9. Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$.

(a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa i g jest różnowartościowa, to $g \circ f$ jest różnowartościowa.

(b) Udowodnić, że jeśli f jest „na" i g jest „na", to $g \circ f$ jest „na".

10. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = x^2$ oraz niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Załóżmy, że g jest różnowartościowa. Czy $f \circ g$ może być różnowartościowa? A $g \circ f$?

(b) Załóżmy, że g jest surjekcją. Czy $f \circ g$ może być surjekcją? A $g \circ f$?

Odpowiedzi uzasadnić.