Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 8

Zadania

1. Dla podanych poniżej funkcji wyznaczyć obraz $f[A]$ i przeciwobraz $f^{-1}[B]$.
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 2$; $A = [-1, 2)$; $B = (2, 3]$,
(b) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$; $f(x, y) = xy + 1$; $A = \{2\} \times \mathbb{N}$; $B = \{1\}$,
(c) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$; $f(n, k) = n^2 - k$; $A = \{1\} \times \mathbb{Z}$; $B = \{0\}$,
(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$; $f(n) = \langle 2n, -2n\rangle$; $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$; $B = \mathbb{N} \times \{0\}$,
(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = \langle x + y, x - y\rangle$; $A = \mathbb{R} \times \{0\}$; $B =$ oś OX,
(f) $f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f(C, D) = C \setminus D$; $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}) \times \{\mathbb{N}\}$; $B = \{\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$,
(g) $f : (\mathbb{N}^+)^2 \to \mathbb{N}$; $f(n, k) = (n - 1)(k + 1)$; $A = \mathbb{N}^+ \times \{1\}$; $B = \{0\}$.

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + 1$. Wyznacz $f\left[\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]\right]$, $f[\{0, 3\pi\}]$, $f[\{1\}]$, $f^{-1}\left[\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right]$ lub $f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right]$ - w oryginale brakowało pary nawiasów, więc można je było dodać wedle własnego uznania, $f^{-1}[\{0\}]$.

3. Niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ będzie dana wzorem $f(n, k) = (n + k)2^n$. Wyznaczyć $f[\{3\} \times \mathbb{N}^+] \cap (40, 60)$ i $f^{-1}[(5, 9) \cap \mathbb{N}^+]$.

4. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $f^{-1}[[2, 3]] = [-1, 1]$ i $f(-1) = f(1)$.

5* Niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ będzie dana wzorem $f(n, k) = 3^n + k$. Rozwiązać równanie

$$f^{-1}[X] = \{\langle 0, n\rangle : n \in \mathbb{Z} \cap (0, 3)\}.$$

6. Narysuj graf relacji R na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ takiej, że
(a) R jest zwrotna, nie jest symetryczna i nie jest słabo antysymetryczna;
(b) R jest symetryczna, przechodnia i $2\,R\,3$;
(c) R jest przeciwzwrotna, przechodnia i ma przynajmniej 3 elementy (przypominam, że elementy relacji to pary uporządkowane – w tłumaczeniu na graf oznacza to, że są przynajmniej trzy strzałki);
(d) R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i nie jest relacją równości;
(e) R jest przechodnia, słabo antysymetryczna i spójna.

7. Niech R będzie relacją pustą, a S relacją pełną na zbiorze $\mathbb{N}$. Które z opisanych na wykładzie własności mają te relacje i dlaczego?

8. Rozważmy relację $R = \{\langle n, n + 1\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ zadaną na zbiorze $\mathbb{N}$. Czy istnieje relacja S na zbiorze $\mathbb{N}$ taka, że $R \subseteq S$, S jest symetryczna, przechodnia i nie jest relacją pełną? Odpowiedź uzasadnić (uzasadnienie może być opisowe, nie musi być formalne, ale powinno być dość dokładne).