Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 9

Zadania

1. Dla podanych zbiorów X i relacji R w X uzasadnij, że R **nie jest** relacją równoważności.
   (a) $X = \mathbb{Z}$; $\quad xRy \Leftrightarrow 3|(x+y)$,
   (b) $X = \mathbb{R}$; $\quad xRy \Leftrightarrow x - y > 1$,
   (c) $X = \mathbb{R}$; $\quad xRy \Leftrightarrow |x-y| \leq 2$,
   (d) $X = \mathbb{R}^2$; $\quad \langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = y_2$,
   (e) $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$; $\quad ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

2. Na zbiorze $\mathbb{N}^+$ definiujemy relację R warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow 2|(x+y).$$

(a) Uzasadnij (korzystając z którejkolwiek z dwóch definicji, podanych na wykładzie), że R jest relacją równoważności.
(b) Wyznacz $[5]_R$.
(c) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^+/_R$.

3. Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(y).$$

(a) Wyznacz $[0]_R$.
(b) Wyznacz $[1]_R$. Sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz tę klasę abstrakcji jeszcze raz, tym razem poprawnie.
(c) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{R}/_R$.

4. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

(a) Wyznacz i narysuj klasy abstrakcji $[\langle 0,0\rangle]_R, [\langle 1,1\rangle]_R$.
(b) Jak wygląda podział płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ zadany przez relację R (czyli zbiór ilorazowy tej relacji)? Opisz go.

5. Na zbiorze $\mathbb{N}^2$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$\langle n_1, m_1\rangle R \langle n_2, m_2\rangle \Leftrightarrow 2|(n_1+n_2) \wedge 2|(n_1+m_1+n_2+m_2).$$

(a) Wyznacz $[\langle 0,1\rangle]_R$.
(a) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^2/_R$.
Wskazówka: Pomyśl, jak uprościć definicję relacji R. Skorzystaj z zadania 2.

6. Na zbiorze $X = [0, 10]$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow [x, x+1] \cap \mathbb{N} = [y, y+1] \cap \mathbb{N}.$$

(a) Wyznacz $[3]_R$.
(b) Wyznacz $\left[\frac{3}{2}\right]_R$.
(c) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

7. Niech $X = \{x \in \mathbb{Z} : |x+1| \leq 5\}$ i niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})$. Rozważamy relację równoważności R na X zadaną warunkiem $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
(a) Wyznacz $[3]_R$.
(b) Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.
(c)* Niech $X = \mathbb{Z}$, a relacja R jest zdefiniowana w ten sam sposób. Wyznacz zbiór ilorazowy $X/_R$.

8. Na zbiorze $\mathbb{N}^2$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x^2 - y^2).$$

(a) Wyznacz $[3]_R$.
(b) Wyznacz zbiór ilorazowy $\mathbb{N}/_R$.

9. Udowodnij, że dla dowolnych relacji równoważności R i S na zbiorze X relacja $R \cup S$ jest relacją równoważności na X.

10. Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$?
Wskazówka: Użyj wniosku 5 z wykładu.

11. Niech $X = \{n \in \mathbb{N}^+ : n \leq 6\}$. Niech funkcja $f : X \to X$ będzie dana wzorem $f(x) = \left[\sqrt{3x}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x \in \mathbb{R}$. Na zbiorze $\mathcal{P}(X)$ definiujemy relację równoważności R warunkiem

$$A \, R \, B \Leftrightarrow f[A] = f[B].$$

(a) Wyznacz $[\emptyset]_R$.
(b) Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(X)/_R$? Odpowiedź uzasadnij (uzasadnienie nie musi polegać na wyznaczeniu tego zbioru ilorazowego).

12. Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2$ będzie relacją zadaną warunkiem

$$xRy \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \, x = y \cdot 2^k.$$

(a) Udowodnij, że R jest relacją równoważności (stosując którąkolwiek z dwóch definicji).
(b) Wyznacz $[1]_R$. Odpowiedź podaj stosując opis zbioru przy pomocy operacji.
(c) Ile jest skończonych klas abstrakcji relacji R? Odpowiedź uzasadnij.

13. Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ rozważmy relację równoważności R zadaną warunkiem

$$ARB \Leftrightarrow (\mathbb{N} \subseteq A \Leftrightarrow \mathbb{N} \subseteq B).$$

(a) Czy $\{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\} \in [\emptyset]_R$?
(b) Czy $[\mathbb{N}]_R = [\mathbb{Z}]_R$?
(c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_R$?
Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.