Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista zadań nr 10

Zadania

0. Naucz się ze zrozumieniem podstawowych definicji związanych z częściowymi porządkami.

1. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, \leqslant \rangle$ oraz $A, B \subseteq X$ i $a \in X$. Zapisz symbolicznie poniższe zdania.
(a) W X nie ma elementu minimalnego.
(b) Zbiór A jest ograniczony w X.
(c) Żaden element B nie ogranicza z dołu zbioru A.
(d) B jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w X.
(e) a jest elementem maksymalnym w A i elementem najmniejszym w B.

2. Narysuj diagramy Hassego podanych zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \preceq \rangle$. Określ elementy minimalne i maksymalne (ew. najmniejsze i największe).
(a) $X = \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset, Y\}$, gdzie $Y = \{1,2,3,4\}$, $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$,
(b) $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 15\},\ x \preceq y \Leftrightarrow x|y$,
(c) $X = \{n \in \mathbb{N} : 7 \leqslant n \leqslant 21\},\ x \preceq y \Leftrightarrow x|y$,
(d) $X = \{0,1,2\} \times \{0,1\},\ \langle x, a\rangle \preceq \langle y, b\rangle \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge a \leqslant b$.

3. Narysuj diagramy Hassego zbiorów częściowo uporządkowanych $\langle X, \preceq \rangle$ mających poniższe własności.
(a) W X jest element największy, nie ma elementu najmniejszego oraz jest czteroelementowy antyłańcuch.
(b) W X są dwa trzyelementowe łańcuchy i jeden trzyelementowy antyłańcuch.
(c) X ma sześć elementów oraz w X jest jeden element maksymalny, dwa elementy minimalne oraz dwa czteroelementowe łańcuchy.
(d) W X są dokładnie trzy elementy minimalne i dokładnie dwa elementy maksymalne oraz każdy element minimalny jest połączony z pewnym elementem maksymalnym czteroelementowym łańcuchem (tzn. jest łańcuch, do którego oba te elementy należą).
(e) Zbiór X jest sześcioelementowy, są w nim dokładnie dwa elementy minimalne i dokładnie dwa elementy maksymalne i nie ma czteroelementowego łańcucha.

W każdym z przypadków wskaż zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ o tej własności, że zbiór częściowo uporządkowany $\langle A, |\, \rangle$ ma dokładnie taki diagram Hassego, jaki został narysowany.

4. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}, |\, \rangle$. Ile elementów minimalnych, maksymalnych, największych, najmniejszych ma zbiór $\{1, 2, 3, ..., 2019, 2020\}$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_p \rangle$, gdzie $\leqslant_p$ jest standardowym porządkiem produktowym na $\mathbb{R}^2$, czyli

$$\langle x, y\rangle \leqslant_p \langle a, b\rangle \Leftrightarrow (x \leqslant a) \wedge (y \leqslant b).$$

(a) Narysuj zbiór elementów porównywalnych z $\langle 1, -2\rangle \in \mathbb{R}^2$.

(b) Niech $A = \{\langle x, y\rangle \in [0, 1]^2 : x + y \leqslant 1\}$. Wyznacz kres górny i dolny zbioru A oraz elementy maksymalne i minimalne w A (o ile istnieją, bądź uzasadnić ich nieistnienie). Czy w zbiorze tym jest element największy bądź najmniejszy?

(c) Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$, który ma jedyny element maksymalny i nie ma elementu największego.

(d) Podaj przykład czteroelementowego antyłańcucha $E \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że wszystkie jego elementy są porównywalne z $\langle 1, 1\rangle$.

6. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_l\rangle$, gdzie $\leqslant_l$ jest standardowym porządkiem leksykograficznym na $\mathbb{R}^2$, czyli

$$\langle x, y\rangle \leqslant_l \langle a, b\rangle \Leftrightarrow x < a \vee (x = a \wedge y \leqslant b).$$

(a) Narysuj zbiór elementów porównywalnych z $\langle 1, -2\rangle \in \mathbb{R}^2$.

(b) Niech $A = \{\langle x, y\rangle \in [0, 1]^2 : x + y \leqslant 1\}$. Wyznacz kres górny i dolny zbioru A oraz elementy maksymalne i minimalne w A (o ile istnieją, bądź uzasadnić ich nieistnienie). Czy w zbiorze tym jest element największy bądź najmniejszy?

(c) Uzasadnij, że nie istnieje zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$, który ma jedyny element maksymalny i nie ma elementu największego.

7. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle (\mathbb{N}^+)^2, \preceq_p\rangle$, gdzie $\preceq_p$ jest porządkiem na $(\mathbb{N}^+)^2$ zdefiniowanym warunkiem

$$\langle x, y\rangle \preceq_p \langle a, b\rangle \Leftrightarrow (x \mid a) \wedge (y \mid b).$$

(a) Wyznacz kres górny zbioru $\{2, 4, 6\}^2$.

(b) Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z $\langle 2, 2\rangle$.

(c) Podaj przykład czteroelementowego antyłańcucha $E \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że wszystkie jego elementy są porównywalne z $\langle 2, 3\rangle$.

8. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany $\langle \mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}, \preceq\rangle$, gdzie

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle a, b\rangle \Leftrightarrow x \mid a \wedge y \leqslant b.$$

Wykonaj te same polecenia, co w zadaniu 7.