Wstęp do matematyki (lato 2020)

Lista przygotowawcza przez kolokwium nr 1

Zadania

0. Korzystając z omówień zadań domowych z list 2-5 upewnij się, że potrafisz poprawnie rozwiązać zadania z tych list. Postaraj się zrozumieć błędy, które popełniła(e)ś rozwiązując te zadania po raz pierwszy (by nie popełnić ich ponownie). Upewnij się, że znasz (i rozumiesz) wszystkie definicje związane z tym fragmentem materiału.

1. O czterech różnych liczbach rzeczywistych a, b, c, d wiemy, że
(i) jeśli a jest mniejsza od b, to c jest mniejsza od d,
(ii) większa z liczb b, d jest mniejsza od większej z liczb a, c.
Czy stąd wynika, że $a < b$? Czy wynika, że $c > d$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dane są zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$. To, że x jest elementem A jest warunkiem koniecznym, by x był elementem B. Czy to oznacza, że
(a) $A \subseteq B$?
(b) $B \subseteq A$?
(c) $A \cap B^c = \emptyset$?
(d) $B \cap A^c = \emptyset$?
Odpowiedzi uzasadnij.

3. Niech A będzie zbiorem liczb, które są kwadratami liczb naturalnych, B zbiorem ujemnych liczb rzeczywistych, a $C = \{n \in \mathbb{Z} : 2 < |n| < 6\}$.
(a) Wypisz wszystkie elementy zbioru $(C \setminus B) \setminus A$.
(b) Znajdź wszystkie elementy $U \in \mathcal{P}(C)$ takie, że $U \setminus B = \emptyset$, ale $U \cap A \neq \emptyset$.

4. Które z poniższych stwierdzeń **mogą być** prawdziwe dla pewnych zbiorów A i B? Odpowiedź uzasadnić.
(a) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$;
(b) $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in \mathcal{P}(A) \times A$;
(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \wedge B \cap A \neq \emptyset$;
(d) $A \in B \wedge \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$.

5. Mamy dane zbiory
$A = \{x^2 - 1 : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 3)$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} : x > -2 \wedge \neg\, x^2 \geqslant 4\}$.
Wyznacz zbiór $\Big(\mathcal{P}(A) \triangle (\mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\})\Big) \times (B \setminus A)$.

6. Mamy dane zbiory
$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x \wedge x^2 < 33\}$,
$B = \{x^2 + x : x \in \mathbb{Z}\} \cap [-1, 6)$.
Wyznacz zbiór $P(((B \triangle A) \times B) \setminus (A \times (-1, 1])) \setminus \{\{\emptyset\}\}$.

7. Niech $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{0, 2, 4\}, B = \{2, 3, 5\}$. Wypisz wszystkie zbiory $U \subseteq X$, które spełniają łącznie następujące warunki:
- nie są rozłączne ze zbiorem A,
- są rozłączne ze zbiorem B,
- nie zawierają się w zbiorze A.

8. Dane są zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}$.
(a) Zapisz funkcję zdaniową $\langle x, y\rangle \in (A \times B) \setminus (B \times A)$ za pomocą funkcji zdaniowych $x \in A, x \in B, y \in A, y \in B$, spójników logicznych i nawiasów.
(b) Określ zbiory $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq \mathbb{R}$ takie, że $(A \times B) \setminus (B \times A) = (U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$.
(c) Udowodnij, że istnieją co najwyżej trzy różne cięcia pionowe zbioru $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

9. Rozważmy zbiór $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taki, że

$$\langle n, N\rangle \in A \iff n \in N.$$

Zbadaj rzuty $\pi_{\mathbb{N}}[A], \pi^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}[A]$ i cięcie A_5. Wykaż, że dla każdego $N \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A^N = N$ (Tutaj, oczywiście, A^N jest cięciem poziomym zbioru A w N).

10. Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ za pomocą sumy uogólnionej odpowiednich zbiorów.

11. O trzech różnych liczbach rzeczywistych a, b, c wiadomo, że:
(i) Jeśli $a > b$, to $a > c$ oraz
(ii) jeśli $c > b$, to $a > b$.
Udowodnij, że c nie jest największą spośród liczb a, b, c.

12. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ niech

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{n + (-1)^n}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{(n+1)^2 - (-1)^n}{n+1}\right\}.$$

Wyznacz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

13. Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ niech

$$A_n = \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1 \wedge y \geqslant 0 \wedge y \leqslant n \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)\right\}.$$

Wyznacz

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$