

Wstęp do matematyki (lato 2025)

Lista przygotowawcza przez kolokwium nr 2

Zadania

0. Upewnij się, że znasz (i rozumiesz) wszystkie definicje związane z tym fragmentem materiału.
1. Zapisz formalnie poniższe zdania i funkcje zdaniowe.
 - (a) Każda liczba rzeczywista różni się o mniej niż $\frac{1}{2}$ od pewnej liczby całkowitej.
 - (b) Jeśli liczba x jest dodatnia, to nie jest najmniejszą liczbą całkowitą.
 - (c) Nie każda liczba naturalna ma dwa różne dzielniki nieparzyste.
 - (d) Liczba x dzieli każdą liczbę parzystą większą od 10.
 - (e) Każda parzysta liczba naturalna jest wielokrotnością pewnej nieparzystej liczby naturalnej.
2. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących własnościach:
 - (a) f nie jest funkcją stałą i $f \circ f$ jest funkcją stałą;
 - (b) $f \circ f$ nie jest funkcją stałą i $f \circ f \circ f$ jest funkcją stałą.
3. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $(\forall x \in \mathbb{R}) g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.
4. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, która jest różnowartościowa.
5. Podaj przykład funkcji $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$, która jest „na”.
6. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który spełnia oba poniższe warunki:
 - $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists k \in A)k < n$,
 - $(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists k \notin A)k < n$.
7. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ daną wzorem $f(x) = x^2 - 3x$. Zdefiniuj funkcję $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tak, by funkcja $f \circ g$ była injekcją.
8. Dla podanych poniżej funkcji sprawdź, czy są 1-1 i czy są „na” oraz wyznacz obraz $f[A]$ i przeciwobraz $f^{-1}[B]$.
 - (a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, n) = x^n$; $A = (0, +\infty) \times \{0\}$; $B = \{0\}$
 - (b) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $f(X) = X \cap \{-x : x \in X\}$; $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$; $B = \{\mathbb{R}\}$
9. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą zadane wzorami
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{gdzie } x > 0 \\ x + 1 & \text{gdzie } x \leq 0. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{gdzie } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{gdzie } x < 0. \end{cases}$$
Wyznacz złożenie $g \circ f$.