Rozdział III

# PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O FUNKCJACH ANALITYCZNYCH

## § 1. LICZBY ZESPOLONE

Jeśli *liczbie zespolonej* $z = x+iy$ przyporządkujemy punkt na płaszczyźnie o współrzędnych prostokątnych $x$, $y$, to między liczbami zespolonymi i punktami płaszczyzny (którą nazwiemy *płaszczyzną zmiennej zespolonej*) zachodzić będzie odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna.

Jeśli liczba zespolona $z$ jest *rzeczywista* (tzn. $y = 0$, czyli $z = x$), to odpowiedni punkt leży na osi odciętych — i na odwrót. Dlatego oś odciętych nazywamy *osią rzeczywistą*. Jeśli liczba zespolona $z$ jest *urojona* (tzn. $y \neq 0$), to odpowiedni punkt leży poza osią odciętych — i na odwrót. Jeśli liczba zespolona $z$ jest *czysto urojona* (tzn. $x = 0$, $y \neq 0$, czyli $z = iy$), to odpowiedni punkt leży na osi rzędnych $x$ — i na odwrót (z wyjątkiem początku układu współrzędnych). Dlatego oś rzędnych nazywamy *osią urojoną*.

Współrzędne biegunowe $r$, $\varphi$ punktu przedstawiającego daną liczbę zespoloną $z$ (gdy jako biegun obierzemy początek układu, a oś biegunową skierujemy wzdłuż osi odciętych) nazywamy odpowiednio *modułem* i *argumentem* liczby zespolonej $z$; moduł i argument oznaczamy symbolami $|z|$ i $\arg z$. Oczywiście $|z| \geqslant 0$, przy czym $|z| = 0$ tylko wtedy, gdy $z = 0$. Jeśli $z \neq 0$, to $\arg z$ ma nieskończenie wiele wartości, które otrzymujemy z jakiegoś jednego $\operatorname{Arg} z$ według wzoru

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$$



($k$ jest dowolną liczbą całkowitą). Dla $z = 0$, wartość $\arg z$ nie jest określona.

Ze wzorów wyrażających współrzędne prostokątne za pomocą współrzędnych biegunowych wynika, że

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

(przy czym oczywiście we wzorze ostatnim bierze się nie wszystkie wartości funkcji wieloznacznej arctg). Ze związków $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ wynika, że

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.1}$$

Wyrażenie (3.1) nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej $z$. Jeśli, na odwrót, liczba zespolona $z$ jest zapisana w postaci (3.1), gdzie liczby $r$, $\varphi$ są rzeczywiste i liczba $r$ jest nieujemna, to $r$ jest modułem, a $\varphi$ — jednym z argumentów liczby $z$.

Jeśli każdemu punktowi $M$ płaszczyzny zmiennej zespolonej przyporządkujemy wektor $\vec{OM}$, to będziemy mogli przedstawiać liczby zespolone za pomocą wektorów.

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych sprowadza się do dodawania i odejmowania odpowiednich wektorów. Stąd wynika, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1$ i $z_2$

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{3.2}$$

skąd przez indukcję

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n| \tag{3.2'}$$

dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ze wzoru (3.2) wynika, że

$$|z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|, \tag{3.3}$$

gdyż z równości $z_1 = (z_1-z_2)+z_2$ na podstawie wzoru (3.2) otrzymujemy $|z_1| \leqslant |z_1-z_2|+|z_2|$, skąd dostajemy (3.3). Zauważmy, że moduł różnicy dwóch liczb zespolonych jest równy odległości między punktami przedstawiającymi te liczby.

Przy mnożeniu liczb zespolonych moduły mnożymy, a argumenty dodajemy. Rzeczywiście, korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych otrzymujemy

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Stąd wynika, że przy dzieleniu liczb zespolonych moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy.

Z reguły mnożenia liczb zespolonych wynika, że przy podnoszeniu do potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim $n$ moduł podnosimy do potęgi $n$-tej, a argument mnożymy przez $n$. Wyraża to *wzór Moivre'a*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3.4}$$

Jeśli we wzorze (3.4) stronę lewą rozwiniemy według dwumianu Newtona i wypiszemy oddzielnie części rzeczywiste i urojone, to otrzymamy wzory na sinus i cosinus wielokrotności kąta:

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \dots, \\ \sin n\varphi &= n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \dots \end{aligned} \tag{3.4'}$$

Postać trygonometryczna liczb zespolonych pozwala sformułować prostą regułę wyciągania pierwiastków z liczb zespolonych. Pierwiastek stopnia $n$-tego z liczby zespolonej $z \neq 0$ ma $n$ wartości. Niech

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

będzie rozważaną liczbą zespoloną i niech

$$w = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$$



będzie jakimś pierwiastkiem stopnia $n$-tego z tej liczby (tzn. liczbą spełniającą równość $w^n = z$). Wówczas

$$\varrho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

skąd $\varrho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, gdzie $k$ jest dowolną liczbą całkowitą.

Wobec tego

$$w = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Na odwrót, dla każdej liczby całkowitej $k$ ostatnie wyrażenie jest pierwiastkiem stopnia $n$-tego z liczby $z$ (gdyż $n$-ta potęga tego wyrażenia jest równa $z$). Ale wypisane wyrażenie dla różnych wartości $k$ przedstawia różne liczby zespolone tylko wtedy, gdy wartości $k$ różnią się o liczbę nie będącą wielokrotnością $n$. Stąd wynika, że jeśli obierzemy na $k$ wartości $0, 1, 2, \dots, n-1$, to otrzymamy wszystkie wartości $\sqrt[n]{z}$; widzimy więc, że ilość tych wartości jest równa $n$. Wszystkie wartości $\sqrt[n]{z}$ są określone wzorem

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \tag{3.5}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Punkty odpowiadające tym wartościom leżą na pewnym okręgu o środku w punkcie 0 i dzielą ten okrąg na $n$ równych części. Wobec tego punkty przedstawiające wartości pierwiastka stopnia $n$-tego z liczby zespolonej są wierzchołkami $n$-kąta foremnego o środku 0.

W szczególności dla $z = 1$ (wtedy $r = 1$, $\varphi = 0$) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \tag{3.5'}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Jeśli $z = x + iy$, to liczbę zespoloną $\bar{z} = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* z liczbą $z$. Punkty odpowiadające liczbom $z$ i $\bar{z}$ są położone symetrycznie względem osi rzeczywistej. Oczywiście

liczba zespolona jest równa liczbie z nią sprzężonej wtedy i tylko wtedy, gdy jest rzeczywista. Sprawdzamy bezpośrednio, że liczby sprzężone z sumą, różnicą, iloczynem i ilorazem są odpowiednio równe sumie, różnicy, iloczynowi i ilorazowi liczb sprzężonych, tzn.

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \qquad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Zauważmy jeszcze, że $z\bar{z}=|z|^2$.

## § 2. SZEREGI O WYRAZACH ZESPOLONYCH

Niech będzie dany ciąg nieskończony liczb zespolonych

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, \tag{3.6}$$

gdzie $z_n=x_n+iy_n$. Liczbę $z=x+iy$ nazywamy *granicą* tego ciągu, gdy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n>N$ zachodzi nierówność $|z_n-z|<\varepsilon$. Piszemy wówczas $z_n\to z$ albo $\lim z_n=z$. Geometrycznie oznacza to, że dla każdego koła o środku $z$ wszystkie wyrazy ciągu poczynając od pewnego wyrazu będą leżały wewnątrz koła. Ciąg liczb zespolonych nie może mieć dwóch granic i wobec tego albo ma jedną granicę (mówimy wtedy, że jest *zbieżny*), albo nie ma granicy (mówimy wtedy, że jest *rozbieżny*).

Ciąg liczb $z_n=x_n+iy_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi liczb $x_n$ i $y_n$ są zbieżne.

Rzeczywiście, jeśli ciąg $z_n=x_n+iy_n$ jest zbieżny do granicy $z=x+iy$, to dla $n>N$ mamy $|z_n-z|<\varepsilon$; ale wówczas tym bardziej $|x_n-x|<\varepsilon$, $|y_n-y|<\varepsilon$ i wobec tego $x_n\to x$, $y_n\to y$. Na odwrót, jeśli $x_n\to x$, $y_n\to y$, to dla $n>N_1$ mamy $|x_n-x|<\varepsilon/\sqrt{2}$, dla $n>N_2$ mamy $|y_n-y|<\varepsilon/\sqrt{2}$; wobec tego dla $n>N$ (gdzie $N$ jest większą z liczb $N_1$ i $N_2$)

$$|z_n-z|=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}<\varepsilon,$$

skąd wynika, że $z_n\to z$.



KRYTERIUM CAUCHY'EGO. *Ciąg liczb zespolonych $z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n>N$ i $p>0$ zachodzi nierówność*

$$|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon$$

To kryterium można udowodnić w sposób bezpośredni, ale można je również otrzymać z kryterium Cauchy'ego dla ciągów liczb rzeczywistych (jeśli przyjmiemy, że dla takich ciągów zostało ono już udowodnione). Rzeczywiście, jeśli ciąg $z_n$ spełnia warunek kryterium Cauchy'ego, to warunek ten spełniają również ciągi $x_n$ i $y_n$, gdyż

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|z_{n+p}-z_n|, \qquad |y_{n+p}-y_n|\leqslant|z_{n+p}-z_n|.$$

Na odwrót, jeśli ciągi $x_n$ i $y_n$ spełniają warunek kryterium Cauchy'ego, to z zależności

$$|z_{n+p}-z_n|=\sqrt{(x_{n+p}-x_n)^2+(y_{n+p}-y_n)^2}$$

wynika od razu, że ciąg $z_n$ również spełnia warunek kryterium Cauchy'ego.

Niech będzie dany szereg o wyrazach zespolonych

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty}w_n, \tag{3.7}$$

gdzie $w_n=u_n+iv_n$.

Mówimy, że szereg (3.7) jest *zbieżny*, gdy ciąg sum częściowych $S_n=w_1+w_2+\ldots+w_n$ jest zbieżny. Granicę $S$ tego ciągu nazywamy *sumą szeregu* (3.7) i piszemy

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}w_n.$$

W przeciwnym razie mówimy, że szereg (3.7) jest *rozbieżny*. Z tego, co udowodniliśmy poprzednio o ciągach, wynika bezpośrednio, że szereg o wyrazach zespolonych $\sum w_n$, gdzie $w_n=u_n+iv_n$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi o wyrazach rzeczywistych $\sum u_n$ i $\sum v_n$ są zbieżne.

Z kryterium Cauchy'ego dla ciągów liczb zespolonych wynika od razu kryterium Cauchy'ego dla szeregów o wyrazach zespolonych: *szereg $\sum w_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n > N$ i $p > 0$ zachodzi nierówność*

$$|w_{n+1}+w_{n+2}+\ldots+w_{n+p}| < \varepsilon.$$

Rzeczywiście, wystarczy tylko zauważyć, że

$$S_{n+p}-S_n = w_{n+1}+w_{n+2}+\ldots+w_{n+p}.$$

Szereg o wyrazach zespolonych $\sum w_n$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, gdy szereg $\sum |w_n|$ jest zbieżny. Z kryterium Cauchy'ego wynika od razu, że szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny. Oczywiście szereg $\sum w_n$, gdzie $w_n = u_n + iv_n$, jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum u_n$ i $\sum v_n$ są zbieżne bezwzględnie; wynika to z nierówności

$$|u_n| \leqslant |w_n| \leqslant |u_n|+|v_n|,$$
$$|v_n| \leqslant |w_n| \leqslant |u_n|+|v_n|.$$

Jeśli szereg $\sum w_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to przy dowolnym przestawieniu wyrazów pozostaje zbieżny bezwzględnie i jego suma nie ulega zmianie. Wynika to z ostatniej uwagi, jeśli przyjmiemy, że dla szeregów o wyrazach rzeczywistych twierdzenie jest już znane.

W szeregach zbieżnych bezwzględnie o wyrazach zespolonych można dowolnie grupować wyrazy (w jednej grupie może znaleźć się skończona albo nieskończona ilość wyrazów). Można to udowodnić w sposób bezpośredni albo otrzymać jako wniosek, jeśli analogiczne twierdzenie dla szeregów zbieżnych bezwzględnie o wyrazach rzeczywistych potraktuje się jako znane.

Szeregi o wyrazach zespolonych zbieżne bezwzględnie można mnożyć tak jak szeregi o wyrazach rzeczywistych. To twierdzenie można udowodnić w sposób bezpośredni, ale można je również otrzymać od razu, jeśli twierdzenie o mnożeniu szeregów o wyrazach rzeczywistych potraktuje się jako znane. Rzeczywiście, niech $\sum w_n$ i $\sum w'_n$ będą szeregami zbieżnymi bezwzględnie, przy



czym $w_n = u_n + iv_n$, $w'_n = u'_n + iv'_n$. Szeregi $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum u'_n$, $\sum v'_n$ będą również zbieżne bezwzględnie i wobec tego

$$\sum_k w_k \sum_l w'_l = \Big(\sum_k u_k + i\sum_k v_k\Big)\Big(\sum_l u'_l + i\sum_l v'_l\Big) =$$

$$= \sum_k u_k \sum_l u'_l - \sum_k v_k \sum_l v'_l + i\Big(\sum_k u_k \sum_l v'_l + \sum_k v_k \sum_l u'_l\Big) =$$

$$= \sum_{k,l} u_k u'_l - \sum_{k,l} v_k v'_l + i\Big(\sum_{k,l} u_k v'_l + \sum_{k,l} v_k u'_l\Big) =$$

$$= \sum_{k,l} [u_k u'_l - v_k v'_l + i(u_k v'_l + v_k u'_l)] = \sum_{k,l} w_k w'_l.$$

## § 3. SZEREGI POTĘGOWE

*Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg postaci

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3.8}$$

gdzie $a_n$ są dowolnymi liczbami zespolonymi, $z$ jest zmienną zespoloną.

Twierdzenie Abela. *Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnej wartości zmiennej, to dla każdej wartości zmiennej o mniejszym module jest zbieżny bezwzględnie.*

Oznacza to, że jeśli szereg $\sum a_n z_0^n$ jest zbieżny i $|z| < |z_0|$, to szereg $\sum a_n z^n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód. Ponieważ szereg $\sum a_n z_0^n$ jest zbieżny, więc jego wyrazy dążą do zera i są wobec tego ograniczone, tzn. istnieje liczba $K$ taka, że dla każdego $n$

$$|a_n z_0^n| < K.$$

Jeśli $|z| < |z_0|$, to liczba $q = |z|/|z_0|$ jest mniejsza od jedności i

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| = |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n < Kq^n.$$

Liczby $Kq^n$ tworzą postęp geometryczny zbieżny do zera, a zatem szereg $\sum Kq^n$ jest zbieżny. Korzystając z twierdzenia o porównywaniu szeregów o wyrazach nieujemnych dochodzimy do wniosku, że szereg $\sum|a_n z^n|$ jest zbieżny, czyli że szereg $\sum a_n z^n$ jest zbieżny bezwzględnie, co właśnie należało wykazać.

WNIOSEK. *Jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny (albo zbieżny nie bezwzględnie) dla pewnej wartości zmiennej, to jest rozbieżny dla wszystkich wartości zmiennej o module większym.*

Oznacza to, że jeśli szereg $\sum a_n z_0^n$ jest rozbieżny (albo zbieżny nie bezwzględnie) i $|z| > |z_0|$, to szereg $\sum a_n z^n$ jest rozbieżny.

Rzeczywiście, gdyby szereg $\sum a_n z^n$ był zbieżny, to na podstawie twierdzenia Abela szereg $\sum a_n z_0^n$ byłby zbieżny bezwzględnie (gdyż $|z_0| < |z|$), co jest sprzeczne z założeniem.

**Obszar zbieżności szeregu potęgowego**

Rozważmy dowolny szereg o wyrazach zależących od $z$. Te wartości $z$, dla których rozważany szereg jest zbieżny, nazywamy *punktami zbieżności* szeregu; te wartości $z$, dla których rozważany szereg jest rozbieżny, nazywamy *punktami rozbieżności* szeregu. Zbiór wszystkich punktów zbieżności nazywamy *obszarem zbieżności* rozważanego szeregu.

Twierdzenie Abela pozwala odpowiedzieć na pytanie, jaki jest obszar zbieżności szeregu potęgowego.

Niech $\sum a_n z^n$ będzie dowolnym szeregiem potęgowym. A priori są możliwe trzy przypadki:

1) wszystkie liczby dodatnie są punktami zbieżności,
2) wszystkie liczby dodatnie są punktami rozbieżności,
3) istnieją liczby dodatnie, które są punktami zbieżności, i istnieją liczby dodatnie, które są punktami rozbieżności.

W przypadku pierwszym na mocy twierdzenia Abela dany szereg potęgowy jest zbieżny (bezwzględnie) dla wszystkich wartości $z$ (gdyż dla każdej liczby zespolonej $z$ istnieje liczba dodatnia większa od $|z|$). Wobec tego obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zmiennej zespolonej.



W przypadku drugim na mocy wniosku z twierdzenia Abela dany szereg potęgowy jest rozbieżny dla wszystkich wartości $z \neq 0$ (gdyż dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ istnieje liczba dodatnia mniejsza od $|z|$). Wobec tego obszar zbieżności składa się z jednego punktu 0.

W przypadku trzecim istnieje dodatni punkt zbieżności $r_1$ i dodatni punkt rozbieżności $R_1$. Jeśli $\frac{1}{2}(r_1+R_1)$ jest punktem zbieżności, to przyjmiemy $r_2 = \frac{1}{2}(r_1+R_1)$, $R_2 = R_1$; natomiast jeśli $\frac{1}{2}(r_1+R_1)$ jest punktem rozbieżności, to przyjmiemy $r_2 = r_1$, $R_2 = \frac{1}{2}(r_1+R_1)$. Biorąc $r_2$, $R_2$ zamiast $r_1$, $R_1$ określamy w taki sam sposób liczby $r_3$, $R_3$ itd. W wyniku otrzymamy ciąg nie malejący dodatnich punktów zbieżności

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$$

i ciąg nierosnący dodatnich punktów rozbieżności

$$R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3 \geqslant \ldots,$$

przy czym

$$R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0.$$

Wobec tego obydwa napisane ciągi mają wspólną granicę

$$\lim r_n = \lim R_n = R.$$

Jeśli $|z| < R$, to dla dostatecznie dużego $n$ zachodzi nierówność $|z| < r_n$ i wobec tego na mocy twierdzenia Abela liczba $z$ jest punktem zbieżności. Jeśli $|z| > R$, to dla dostatecznie dużego $n$ zachodzi nierówność $|z| > R_n$ i wobec tego na mocy wniosku z twierdzenia Abela liczba $z$ jest punktem rozbieżności. Tak więc wewnątrz koła o promieniu $R$ i środku 0 szereg jest zbieżny (bezwzględnie), a na zewnątrz tego koła jest rozbieżny. Problem zbieżności albo rozbieżności szeregu w punktach leżących na okręgu koła pozostaje otwarty. Widzimy więc, że obszarem zbieżności

szeregu potęgowego jest koło o promieniu $R$ i środku 0 (mówiąc ściślej: wnętrze tego koła i — być może — pewne punkty leżące na okręgu koła). To koło nazywamy *kołem zbieżności* szeregu potęgowego. Jego promień nazywamy *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego.

W przypadku pierwszym i drugim trzeba przyjąć odpowiednio $R = \infty$ i $R = 0$ (koło zbieżności staje się całą płaszczyzną albo redukuje się do punktu).

We wszystkich punktach wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie.

Jeśli w pewnym punkcie leżącym na okręgu koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie, to jest on zbieżny bezwzględnie we wszystkich punktach leżących na okręgu koła zbieżności (gdyż moduły wyrazów szeregu potęgowego są jednakowe dla wszystkich punktów leżących na tym okręgu).

Jeśli w pewnym punkcie leżącym na okręgu koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny nie bezwzględnie albo rozbieżny, to w każdym punkcie leżącym na okręgu koła zbieżności jest on zbieżny nie bezwzględnie albo rozbieżny.

Rozważmy teraz szereg

$$(3.8') \qquad b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots+\frac{b_n}{z^n}+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}.$$

Przyjmując $\zeta = 1/z$ sprowadzamy ten szereg do szeregu potęgowego $\sum_0^\infty b_n\zeta^n$ o pewnym promieniu zbieżności $\varrho$. Dla $|\zeta| < \varrho$ szereg jest zbieżny, a dla $|\zeta| > \varrho$ szereg jest rozbieżny. Wobec tego szereg (3.8′) jest zbieżny dla $|z| > 1/\varrho$ i rozbieżny dla $|z| < 1/\varrho$. Przyjmując $r = 1/\varrho$ widzimy, że obszarem zbieżności szeregu (3.8′) jest część płaszczyzny na zewnątrz koła (rys. 24) o promieniu $r$ i środku 0 (mówiąc ściślej: zbiór punktów leżących na zewnątrz koła i — być może — pewne punkty leżące na okręgu koła). We wszystkich punktach na zewnątrz tego koła szereg (3.8′) jest zbieżny bezwzględnie.



Rozważmy teraz szereg nieskończony w obie strony

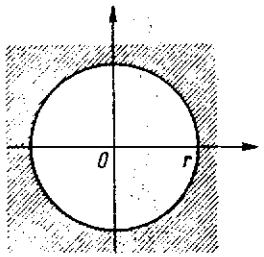
(3.8″)

$$\ldots+\frac{a_{-n}}{z^n}+\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

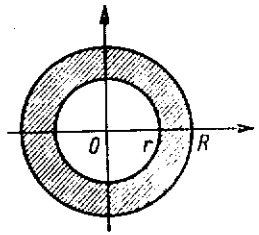
lub

$$\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n.$$

Szereg nieskończony w obie strony uważamy za zbieżny, gdy jest zbieżny szereg utworzony z wyrazów leżących na prawo od pewnego wyrazu i szereg utworzony z wyrazów leżących na



Rys. 24



Rys. 25

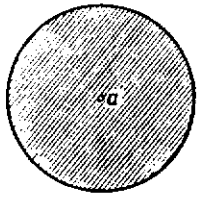
lewo od pewnego wyrazu (oczywiście nie trzeba wskazywać pozycji tego pewnego wyrazu, gdyż przy innym jego wyborze w wymienionych dwóch szeregach ulegnie zmianie tylko skończona ilość wyrazów, co nie ma wpływu na zbieżność). Tak więc szereg (3.8″) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy są równocześnie zbieżne szeregi

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

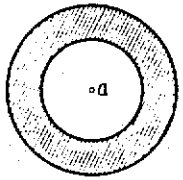
i

$$\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{z^n}+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n} \quad (\text{lub } \sum_{-\infty}^{-1}a_nz^n).$$

Obszar zbieżności pierwszego z tych szeregów jest wnętrzem pewnego koła o promieniu $R$ i środku 0. Obszar zbieżności szeregu drugiego składa się z punktów leżących na zewnątrz pewnego koła o promieniu $r$ i środku 0. Jeśli $r < R$, to część wspólna tych obszarów zbieżności jest pierścieniem o środku 0 (rys. 25). W tym więc przypadku obszarem zbieżności szeregu (3.8″) jest pierścień ograniczony dwoma okręgami o środku 0 (do którego dochodzą, być może, pewne punkty leżące na okręgach ograniczających). Ten pierścień nazywamy *pierścieniem zbieżności* szeregu (3.8″). Wewnątrz pierścienia zbieżności szereg (3.8″) jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli $r > R$, to szereg (3.8″) nie ma punktów zbieżności; jeśli $r = R$, to szereg (3.8″) może mieć punkty zbieżności tylko na okręgu o promieniu $r = R$.




Rys. 26




Rys. 27

Rozważmy szereg potęgowy

$$(3.8''') \quad A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots+A_n(z-a)^n+\ldots$$

lub $$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n.$$

Przyjmując $\zeta = z-a$ sprowadzamy ten szereg do szeregu $\sum_0^{\infty} A_n\zeta^n$ o pewnym promieniu zbieżności $R$. Powracając do zmiennej $z$ otrzymujemy, że obszarem zbieżności szeregu (3.8‴) jest koło (rys. 26) o promieniu $R$ i środku $a$ (mówiąc ściślej: wnętrze koła i być może pewne punkty leżące na okręgu koła). To koło nazywamy *kołem zbieżności* szeregu (3.8‴), a jego promień — *promieniem zbieżności* szeregu (3.8‴) (przy $R = \infty$ otrzymujemy całą płaszczyznę, przy $R = 0$ koło redukuje się do punktu $a$). Wewnątrz koła zbieżności szereg (3.8‴) jest zbieżny bezwzględnie.



Rozważmy szereg

$$(3.8'''') \quad \ldots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\ldots$$

$$\ldots+A_n(z-a)^n+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n.$$

Przyjmując $\zeta = z-a$ sprowadzamy ten szereg do szeregu $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\zeta^n$. Jeśli ostatni szereg ma pierścień zbieżności $r < |\zeta| < R$, to obszarem zbieżności szeregu (3.8⁗) jest pierścień ograniczony okręgami o promieniach $r$ i $R$ i środku $a$ (rys. 27). Ten pierścień nazywamy *pierścieniem zbieżności* szeregu (3.8⁗). Wewnątrz pierścienia zbieżności szereg (3.8⁗) jest zbieżny bezwzględnie.

## § 4. FUNKCJA WYKŁADNICZA, FUNKCJE HIPERBOLICZNE I TRYGONOMETRYCZNE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Dla dowolnej liczby zespolonej $z$ określmy funkcje

$$e^z,\ \cosh z,\ \sinh z,\ \cos z,\ \sin z$$

jako sumy tych szeregów potęgowych, które są rozwinięciami wypisanych funkcji w przypadku, gdy zmienna $z$ jest rzeczywista. Ponieważ odpowiednie szeregi potęgowe są zbieżne na całej prostej liczbowej, więc (na mocy twierdzenia Abela) są również zbieżne na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Tak więc dla dowolnej liczby zespolonej $z$ przyjmujemy następujące definicje:

$$(3.9) \quad e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

$$(3.10) \quad \cosh z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.11}$$

$$\cosh z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{3.12}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.13}$$

Z tego określenia widać, że dla wartości rzeczywistych $z$ wprowadzone funkcje są identyczne ze znanymi funkcjami zmiennej rzeczywistej. Dalej widać, że $\cosh z$ i $\cos z$ są funkcjami parzystymi (tzn. mają własność $f(-z) = f(z)$), natomiast $\sinh z$ i $\sin z$ są funkcjami nieparzystymi (tzn. mają własność $f(-z) = -f(z)$).

**Wzory Eulera**

Dla każdej liczby zespolonej $z$ na mocy wzorów (3.9), (3.12), (3.13) mamy

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{i^2z^2}{2!} + \frac{i^3z^3}{3!} + \frac{i^4z^4}{4!} + \frac{i^5z^5}{5!} + \ldots = \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \\ &= \cos z + i\sin z, \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy z faktu, że w szeregu zbieżnym bezwzględnie można grupować wyrazy w sposób dowolny.

W ten sposób otrzymaliśmy *wzór Eulera*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{3.14}$$

Zastępując $z$ przez $-z$ otrzymujemy

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$



Dodając i odejmując stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z, \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z,$$

skąd

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3.14'}$$

Te wzory również nazywamy *wzorami Eulera*.

Korzystając ze wzoru Eulera (3.14) liczbę zespoloną zapisaną w postaci trygonometrycznej (3.1) można również przedstawić w postaci

$$z = re^{i\varphi}, \tag{3.15}$$

gdzie $r$ jest modułem, a $\varphi$ — argumentem liczby $z$.

Wyrażenie (3.15) nazywamy *postacią wykładniczą* liczby zespolonej $z$.

**Związki między funkcją wykładniczą i funkcjami hiperbolicznymi**

Dla każdej liczby zespolonej $z$ na mocy wzorów (3.9), (3.10), (3.11) mamy

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \\ &= \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) + \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = \cosh z + \sinh z. \end{aligned}$$

Zastępując $z$ przez $-z$ otrzymujemy

$$e^{-z} = \cosh z - \sinh z.$$

Dodając i odejmując stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy

$$e^z + e^{-z} = 2\cosh z, \quad e^z - e^{-z} = 2\sinh z,$$

skąd

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{3.16}$$

**Związki między funkcjami trygonometrycznymi i funkcjami hiperbolicznymi**

Ze wzorów (3.10) i (3.12) wynika

$$\cosh iz = 1+\frac{i^2z^2}{2!}+\frac{i^4z^4}{4!}+\ldots = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots = \cos z$$

i analogicznie

$$\cos iz = \cosh z.$$

Ze wzorów (3.11) i (3.13) wynika

$$\sinh iz = iz+\frac{i^3z^3}{3!}+\frac{i^5z^5}{5!}+\ldots = i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right) = i\sin z$$

i analogicznie

$$\sin iz = i\sinh z.$$

Tak więc

$$\begin{aligned}&\cosh iz = \cos z, \quad \cos iz = \cosh z,\\ &\sinh iz = i\sin z, \quad \sin iz = i\sinh z.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Wzory (3.17) wynikają również bezpośrednio ze wzorów (3.14′) i (3.16).

**Twierdzenie o dodawaniu dla funkcji wykładniczej**

Stosując regułę mnożenia szeregów zbieżnych bezwzględnie możemy napisać

$$e^{z_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}, \qquad e^{z_2} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{z_2^l}{l!},$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{k,l}\frac{z_1^kz_2^l}{k!l!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n}\frac{z_1^kz_2^l}{k!l!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}z_1^kz_2^l.$$

Ale

$$\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}z_1^kz_2^l = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^kz_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^kz_2^{n-k} = (z_1+z_2)^n$$

(*dwumian Newtona*).



Wobec tego

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = e^{z_1+z_2}.$$

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie o dodawaniu dla funkcji wykładniczej:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{3.18}$$

Stąd widać, że funkcja wykładnicza $e^z$ dla żadnej wartości $z$ nie jest równa zeru. Rzeczywiście, gdyby $e^{z_1} = 0$, to dla każdej liczby zespolonej $z$ zachodziłaby równość $e^z = e^{z_1}e^{z-z_1} = 0e^{z-z_1} = 0$, co nie jest prawdą, gdyż $e^0 = 1$.

**Twierdzenia o dodawaniu dla funkcji trygonometrycznych**

Ze wzorów (3.14′), (3.18), (3.14) otrzymujemy

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2}+e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2} =$$

$$= \frac{(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)+(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)}{2} =$$

$$= \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,$$

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$= \frac{(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)-(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)}{2} =$$

$$= \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenia o dodawaniu dla funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus:

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,\\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

**Twierdzenia o dodawaniu dla funkcji hiperbolicznych**

Ze wzorów (3.17) i (3.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\cosh(z_1+z_2) &= \cos i(z_1+z_2) = \cos iz_1\cos iz_2 - \sin iz_1\sin iz_2 = \\ &= \cosh z_1\cosh z_2 - i\sinh z_1 i\sinh z_2 = \cosh z_1\cosh z_2 + \\ &\quad + \sinh z_1\sinh z_2,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\sinh(z_1+z_2) = \frac{\sin i(z_1+z_2)}{i} = \frac{\sin iz_1\cos iz_2+\cos iz_1\sin iz_2}{i} =$$

$$= \frac{i\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1 i\sinh z_2}{i} = \sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2.$$

**Okresowość**

Funkcja wykładnicza $e^z$ ma okres $2\pi i$. Rzeczywiście,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

Stąd wynika, że funkcje $\cosh z$ i $\sinh z$ (które wyrażają się za pomocą $e^z$) również mają okres $2\pi i$. Natomiast funkcja $e^{iz}$ ma okres $2\pi$, gdyż

$$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz};$$

wobec tego funkcje $\cos z$ i $\sin z$ (które wyrażają się za pomocą $e^{iz}$) również mają okres $2\pi$.

## § 5. NIEKTÓRE FUNKCJE WIELOZNACZNE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

**Logarytmy liczb zespolonych**

Liczbę $w$ nazywamy *logarytmem* liczby zespolonej $z$ (przy podstawie $e$), gdy $e^w = z$. Każdą wartość logarytmu liczby $z$ będziemy oznaczali symbolem $\ln z$. Załóżmy, że $z \neq 0$ (liczba zero oczywiście nie ma logarytmu, gdyż funkcja wykładnicza nigdy nie jest równa zeru). Posługując się postacią wykładniczą liczby danej $z = re^{i\varphi}$ ($r$ jest modułem, $\varphi$ jest argumentem) i postacią algebraiczną liczby szukanej $w = u+iv$ otrzymamy warunek

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi} \quad \text{lub} \quad e^u e^{iv} = re^{i\varphi},$$



skąd $e^u = r$, $v = \varphi + 2k\pi$ ($k$ jest liczbą całkowitą) i wobec tego

$$w = \ln r + i(\varphi + 2k\pi).$$

Na odwrót, dla każdej liczby całkowitej $k$ ostatnie wyrażenie jest — co widać od razu — wartością logarytmu liczby $z$. Tak więc $\ln z$ ma dla $z \neq 0$ nieskończenie wiele wartości, przy czym wszystkie te wartości otrzymujemy ze wzoru

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{3.21}$$

($k$ jest dowolną liczbą całkowitą) lub

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \tag{3.21'}$$

Stąd widać, że wszystkie wartości $\ln z$ otrzymujemy z jakiejś jednej wartości $(\ln z)_0$ według wzoru

$$\ln z = (\ln z)_0 + 2k\pi i \tag{3.21''}$$

($k$ jest dowolną liczbą całkowitą).

Łatwo widzieć, że zwykłe reguły logarytmowania pozostają prawdziwe.

**Potęgi o wykładniku zespolonym i podstawie zespolonej**

Niech $A$ i $B$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi (przy czym $A \neq 0$). Przyjmujemy definicję

$$A^B = e^{B\ln A}.$$

Widzimy, że tak określona potęga ma na ogół nieskończenie wiele wartości (gdyż $\ln A$ ma nieskończenie wiele wartości). Jeśli $B$ jest liczbą rzeczywistą całkowitą, to wartości wykładnika $B\ln A$ występującego po stronie prawej różnią się o wielkrotności $2\pi i$ i potęga $A^B$ ma w tym przypadku tylko jedną wartość.

PRZYKŁAD.

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i\cdot i(\pi/2+2k\pi)} = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$$

($k$ jest dowolną liczbą całkowitą).

**Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych**

Niech $z$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Na mocy określenia $\arcsin z$ jest dowolną liczbą zespoloną $w$ spełniającą równość $\sin w = z$. Tak więc dochodzimy do równania

$$\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = z,$$

czyli

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2},$$

$$w = \frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}).$$

Tak więc wszystkie wartości $\arcsin z$ są określone wzorem

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}). \tag{3.22}$$

Wieloznaczność tej funkcji wynika z dwóch przyczyn: pierwiastek kwadratowy ma dwie wartości, logarytm ma nieskończenie wiele wartości. Wyrażenie (3.22) ma sens dla wszystkich wartości $z$, gdyż wyrażenie występujące pod znakiem logarytmu jest zawsze różne od zera.

Podobnie $\arccos z$ jest dowolną liczbą zespoloną $w$ spełniającą równość $\cos w = z$. W tym przypadku otrzymujemy równanie

$$\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = z,$$

czyli

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

skąd

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1},$$

$$w = \frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}).$$



Wobec tego wszystkie wartości $\arccos z$ są określone wzorem

$$\arccos z = \frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}). \tag{3.23}$$

Wieloznaczność tej funkcji wynika z dwóch przyczyn: pierwiastek kwadratowy ma dwie wartości, logarytm ma nieskończenie wiele wartości. Równość (3.23) ma sens dla wszystkich wartości $z$, gdyż wyrażenie występujące pod znakiem logarytmu dla wszystkich wartości $z$ ma sens i jest różne od zera.

Rozważmy jeszcze $\operatorname{arctg} z$ określony jako dowolna liczba $w$ spełniająca równość $\operatorname{tg} w = z$ [1]. Mamy

$$\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})} = z,$$

czyli

$$\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} = iz,$$

a więc

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z},$$

$$w = \frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z}.$$

Wobec tego

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z}. \tag{3.24}$$

Wieloznaczność tej funkcji wynika z wieloznaczności logarytmu. Wyrażenie (3.24) traci sens przy $z = \pm i$.

---

[1] Funkcję $\operatorname{tg} z$ określamy, podobnie jak dla wartości rzeczywistych $z$, wzorem $\operatorname{tg} z = \sin z/\cos z$ (*przypisek tłumacza*).

**Funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych**

Na mocy określenia $\operatorname{arsinh} z$ jest dowolną liczbą zespoloną $w$ spełniającą równość $\sinh w = z$. Mamy

$$\frac{e^w - e^{-w}}{2} = z,$$

czyli

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0,$$

skąd

$$e^w = z + \sqrt{z^2+1},$$

$$w = \ln(z + \sqrt{z^2+1}).$$

Wobec tego

(3.25) $$\operatorname{arsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1}).$$

Podobnie $\operatorname{arcosh} z$ jest dowolną liczbą zespoloną $w$ spełniającą równość $\cosh w = z$. W tym przypadku

$$\frac{e^w + e^{-w}}{2} = z,$$

$$e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0,$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2-1},$$

$$w = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$$

i wobec tego

(3.26) $$\operatorname{arcosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}).$$

Na mocy określenia $\operatorname{artgh} z$ jest dowolną liczbą zespoloną $w$ spełniającą równość $\operatorname{tgh} w = z$ [1]. W tym przypadku

$$\frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = z,$$

[1] Funkcję $\operatorname{tgh} z$ określamy, podobnie jak dla wartości rzeczywistych $z$, wzorem $\operatorname{tgh} z = \sinh z / \cosh z$ (*przypisek tłumacza*).



$$\frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} = z,$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z},$$

$$w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Wobec tego

(3.27) $$\operatorname{artgh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

To wyrażenie traci sens przy $z = \pm 1$.

W teorii funkcji analitycznych wygodnie jest rozważać funkcje wieloznaczne jako funkcje jednoznaczne określone na pewnych powierzchniach wielolistnych (tzw. *powierzchniach Riemanna*). Ponieważ nie możemy tu podać żadnego ogólnego określenia takich powierzchni, ograniczymy się do poglądowego skonstruowania takich powierzchni dla najprostszych funkcji wieloznacznych $\sqrt[n]{z}$ i $\ln z$.

Rozważmy $n$ egzemplarzy płaszczyzny zmiennej zespolonej $z$ (ponumerowanych liczbami $1, 2, \ldots, n$) rozciętych wzdłuż dodatniej części osi rzeczywistej i sklejmy te egzemplarze w sposób następujący: dolny brzeg rozcięcia płaszczyzny pierwszej łączymy z górnym brzegiem rozcięcia płaszczyzny drugiej, dolny brzeg rozcięcia płaszczyzny drugiej łączymy z górnym brzegiem rozcięcia płaszczyzny trzeciej itd., dolny brzeg rozcięcia płaszczyzny $(n-1)$-szej łączymy z górnym brzegiem rozcięcia płaszczyzny $n$-tej i wreszcie dolny brzeg rozcięcia płaszczyzny $n$-tej łączymy z górnym brzegiem rozcięcia płaszczyzny pierwszej (ostatniego sklejenia nie można wykonać bez przenikania). W wyniku otrzymamy powierzchnię $n$-listną z punktem rozgałęzienia 0. Jeśli zaczniemy okrążać punkt 0, to po każdym okrążeniu znajdziemy się na liściu następnym i po $n$ okrążeniach powrócimy do punktu wyjścia. Funkcję $\sqrt[n]{z}$ $n$-znaczną na zwykłej płaszczyźnie zmiennej zespolonej można rozważać jako funkcję jednoznaczną określoną na zbudowanej powierzchni $n$-listnej. Zbudowana powierzchnia jest powierzchnią Riemanna funkcji $\sqrt[n]{z}$.

Rozważmy teraz nieskończenie wiele egzemplarzy płaszczyzny zmiennej zespolonej (ponumerowanych wszystkimi liczbami całkowitymi $\gtreqless 0$) z roz-

cięciami wzdłuż dodatniej części osi rzeczywistej. Dla każdej liczby całkowitej $n$ sklejmy dolny brzeg egzemplarza $n$-tego z górnym brzegiem egzemplarza $(n+1)$-szego. W wyniku otrzymamy powierzchnię nieskończenie wielolistną. Jeśli zaczniemy okrążać punkt 0 w dowolnym kierunku dowolną ilość razy, to wciąż będziemy przechodzić na nowe liście i nigdy nie wrócimy do położenia początkowego. Funkcję $\arg z$ nieskończenie wieloznaczną na zwykłej płaszczyźnie zmiennej zespolonej można rozważać jako funkcję jednoznaczną określoną na zbudowanej powierzchni wielolistnej. A więc funkcję $\ln z$ również można rozważać jako funkcję jednoznaczną określoną na tej samej powierzchni (zbudowana powierzchnia jest powierzchnią Riemanna funkcji $\ln z$).

## § 6. POCHODNA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

**Pochodna funkcji o wartościach zespolonych zmiennej rzeczywistej**

Niech $z(t) = x(t) + iy(t)$ będzie funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej $t$.

Mówimy, że ta funkcja jest *ciągła* w punkcie $t$, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\eta > 0$, że dla $|\Delta t| < \eta$ zachodzi nierówność $|z(t+\Delta t) - z(t)| < \varepsilon$. Funkcja $z(t)$ jest ciągła w punkcie $t$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są ciągłe w punkcie $t$.

*Pochodną* funkcji $z(t)$ w punkcie $t$ określamy jako granicę

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

(o ile ta granica istnieje) i oznaczamy ją symbolem $\frac{dz}{dt}$ lub $z'(t)$.

Z określenia wynika, że pochodna $\frac{dz}{dt}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$, przy czym

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$



**Określenie pochodnej funkcji zmiennej zespolonej**

Niech $w = f(z)$ będzie funkcją zmiennej zespolonej $z$.

Mówimy, że ta funkcja jest *ciągła* w punkcie $z$, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\eta > 0$, że dla $|\Delta z| < \eta$ (o ile $z+\Delta z$ należy do obszaru określoności funkcji) zachodzi nierówność $|\Delta w| < \varepsilon$.

*Pochodną* funkcji $w = f(z)$ w punkcie $z$ (zakładamy, że funkcja jest określona w otoczeniu tego punktu) określamy jako granicę

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

(o ile ta granica istnieje) i oznaczamy ją symbolem $\frac{dw}{dz}$ lub $f'(z)$.

Jeśli pochodna istnieje w pewnym punkcie $z$, to funkcja jest ciągła w tym punkcie.

Powiemy, że funkcja $f(z)$ jest *różniczkowalna* w punkcie $z$, gdy z przyrostu funkcji w tym punkcie

$$f(z+\Delta z) - f(z)$$

można wyodrębnić część główną liniową, tzn. wyrażenie postaci $C\Delta z$ ($C$ jest pewną liczbą zespoloną) takie, że pozostała część jest nieskończenie małą wyższego rzędu względem $\Delta z$. Tak więc funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w punkcie $z$, gdy istnieje rozkład

$$f(z+\Delta z) - f(z) = C\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z,$$

w którym $\gamma(\Delta z) \to 0$ przy $\Delta z \to 0$.

Stąd wynika, że

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = C + \gamma(\Delta z) \to C,$$

a to oznacza, że w rozważanym punkcie funkcja $f(z)$ ma pochodną $f'(z) = C$.

Na odwrót, jeśli funkcja $f(z)$ ma pochodną w rozważanym punkcie, to

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \gamma(\Delta z),$$

gdzie $\gamma(\Delta z) \to 0$ przy $\Delta z \to 0$, skąd

$$f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\Delta z+\gamma(\Delta z)\Delta z$$

i wobec tego funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w rozważanym punkcie.

Tak więc istnienie pochodnej i różniczkowalność w punkcie są faktami równoważnymi.

**Przypomnienie o różniczce zupełnej funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych**

Mówimy, że funkcja $u(x, y)$ jest różniczkowalna lub że ma *różniczkę zupełną* w danym punkcie $(x, y)$ (zakładamy, że funkcja jest określona w otoczeniu tego punktu), gdy z przyrostu zupełnego funkcji w tym punkcie

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)$$

można wyodrębnić część główną liniową, tzn. wyrażenie postaci $A\Delta x+B\Delta y$ ($A$ i $B$ są pewnymi liczbami) takie, że pozostała część jest nieskończenie małą wyższego rzędu względem $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Tak więc funkcja $u(x, y)$ jest różniczkowalna w punkcie $(x, y)$, gdy istnieje rozkład

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y) = A\Delta x+B\Delta y+\gamma(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

w którym $\gamma(\Delta x, \Delta y) \to 0$ przy $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$.

Przyjmując $\Delta y = 0$ będziemy mieli

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y) = A\Delta x+\gamma(\Delta x, 0)|\Delta x|,$$

$$\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x, y)}{\Delta x} = A \pm\gamma(\Delta x, 0) \to A, \quad \text{gdy} \quad \Delta x \to 0,$$

skąd widać, że w rozważanym punkcie funkcja $u(x, y)$ ma pochodną cząstkową względem $x$, przy czym $\partial u/\partial x = A$. Analogicznie stwierdzamy istnienie pochodnej cząstkowej względem $y$ i równość $\partial u/\partial y = B$.

Tak więc część główna liniowa przyrostu zupełnego funkcji $u(x, y)$ jest równa

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

Nazywamy ją *różniczką zupełną* funkcji $u(x, y)$ w danym punkcie. Oznaczając różniczkę zupełną symbolem $du$, a przyrosty zmiennych niezależnych symbolami $dx$ i $dy$ otrzymujemy wzór

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$



Widzimy, że z istnienia różniczki zupełnej wynika istnienie pochodnych cząstkowych. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. może się zdarzyć, że pochodne cząstkowe w danym punkcie istnieją, ale różniczka zupełna nie istnieje. Jeśli jednak pochodne cząstkowe istnieją w otoczeniu rozważanego punktu i są ciągłe w tym punkcie, to w tym punkcie istnieje różniczka zupełna.

Rzeczywiście, stosując wzór Lagrange'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y) = \\
&= [u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)]+[u(x, y+\Delta y)-u(x, y)] = \\
&= u'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+u'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y = \\
&= [u'_x(x, y)+\alpha]\Delta x+[u'_y(x, y)+\beta]\Delta y = \\
&= u'_x(x, y)\Delta x+u'_y(x, y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,
\end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$\alpha \to 0, \quad \beta \to 0 \quad \text{przy} \quad \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0.$$

Ale

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant |\alpha|+|\beta| \to 0, \quad \text{gdy} \quad \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0,$$

i wobec tego $u'_x(x, y)\Delta x+u'_y(x, y)\Delta y$ jest częścią główną liniową przyrostu zupełnego, czyli różniczka zupełna istnieje.

**Warunki konieczne różniczkowalności funkcji zmiennej zespolonej**

Niech

$$w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$$

będzie funkcją zmiennej zespolonej $z = x+iy$, różniczkowalną w danym punkcie $z$.

Ponieważ w danym punkcie funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna, więc funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są również różniczkowalne w tym punkcie. Rzeczywiście, jeśli z przyrostu $w = f(z+\Delta z)-f(z)$ można wyodrębnić część główną liniową, to biorąc jej część rze-

czywistą i współczynnik przy $i$ otrzymamy odpowiednio części główne liniowe przyrostów zupełnych

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)$$

i

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y).$$

Jeśli punkt przesunięty $z+\Delta z$ dąży do $z$ po prostej poziomej, to w wyrażeniu

$$\Delta z = \Delta x+i\Delta y$$

należy przyjąć $\Delta y = 0$; wówczas

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\to \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jeśli punkt przesunięty dąży do $z$ po prostej pionowej, to w wyrażeniu

$$\Delta z = \Delta x+i\Delta y$$

należy przyjąć $\Delta x = 0$. Wówczas

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y}-i\frac{\Delta u}{\Delta y}\to \frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wobec tego istniejąca na mocy założenia pochodna $f'(z)$ wyraża się wzorami

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

skąd

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.28}$$

Równania (3.28) nazywamy *warunkami Cauchy-Riemanna.*



**Warunek dostateczny różniczkowalności funkcji zmiennej zespolnej.**

Załóżmy, że funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są różniczkowalne i spełniają warunki Cauchy-Riemanna w danym punkcie. Będziemy mieli ($\alpha, \beta \to 0$, gdy $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$)

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\Delta x+i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)+(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Ale

$$\left|\frac{(\alpha+i\beta)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y}\right| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\to 0, \quad \text{gdy} \quad \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0.$$

Wobec tego

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

tzn. pochodna $f'(z)$ istnieje.

Tak więc funkcja zmiennej zespolonej $w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ jest różniczkowalna w danym punkcie wtedy i tylko

wtedy, gdy w tym punkcie funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są różniczkowalne i spełniają warunki Cauchy-Riemanna (3.28).

Pochodna $f'(z)$ wyraża się wzorami

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \tag{3.29}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

PRZYKŁAD. Niech $f(z) = e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y$. Wszystkie założenia są oczywiście spełnione i ze wzoru (3.29) otrzymujemy $f'(z) = e^z$.

### Pochodna funkcji złożonej

Niech $w = f(z)$, $z = \varphi(\zeta)$; wówczas $w = f[\varphi(\zeta)]$. Przechodząc w równości

$$\frac{\Delta w}{\Delta \zeta} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta \zeta} \tag{3.30'}$$

do granicy przy $\Delta\zeta \to 0$ otrzymujemy

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}, \tag{3.30}$$

przy założeniu, że funkcja $\varphi$ jest różniczkowalna w punkcie $\zeta$ i funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $z = \varphi(\zeta)$.

Podane wyprowadzenie wzoru (3.30) jest poprawne, jeżeli $dz/d\zeta \neq 0$, gdyż wówczas dla dostatecznie małych $\Delta\zeta$ przyrost $\Delta z$ jest różny od zera i równość (3.30') ma sens. Jeśli w danym punkcie $dz/d\zeta = 0$, to dowód wymaga uzupełnienia. Jeśli istnieją dowolnie małe wartości $\Delta\zeta$, dla których $\Delta z \neq 0$, to ze związku (3.30') wynika, że gdy $\Delta\zeta$ dąży do zera poprzez takie wartości, to stosunek $\Delta w/\Delta\zeta$ dąży do

$$\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot 0 = 0.$$

Dla tych wartości $\Delta\zeta$, dla których $\Delta z = 0$, zachodzi oczywiście równość $\Delta w = 0$; wobec tego jeśli istnieją dowolnie małe wartości $\Delta\zeta$, dla których $\Delta z = 0$, to przy $\Delta\zeta$ dążącym do zera poprzez takie wartości stosunek $\Delta w/\Delta\zeta$ również dąży do zera. Tak więc $\Delta w/\Delta\zeta$ dąży do zera, gdy $\Delta\zeta \to 0$, czyli pochodna $dw/d\zeta$ istnieje i jest równa zeru. Ponieważ w rozważanym przypadku prawa strona wzoru (3.30) też jest równa zeru, więc wzór (3.30) jest prawdziwy również w przypadku $dz/d\zeta = 0$.



Formalnie technika różniczkowania funkcji zmiennej zespolonej nie różni się od techniki różniczkowania funkcji zmiennej rzeczywistej i dlatego nie będziemy się nią zajmowali. Zauważmy jeszcze, że jeśli $z(t)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej, a $f(z)$ jest funkcją zespoloną zmiennej zespolonej, to $f[z(t)]$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej. Rozumując jak przy wyprowadzeniu wzoru (3.30) otrzymamy

$$\{f[z(t)]\}' = f'[z(t)]z'(t), \tag{3.31}$$

przy założeniu, że pochodne występujące po stronie prawej istnieją.

## § 7. FUNKCJE ANALITYCZNE I HARMONICZNE

Zbiór punktów na płaszczyźnie nazywamy *otwartym*, gdy wokół każdego punktu tego zbioru można zatoczyć koło całkowicie leżące w tym zbiorze. Zbiór otwarty nazywamy *obszarem*, gdy każde dwa jego punkty można połączyć łukiem ciągłym leżącym w tym zbiorze. *Punktem brzegowym* obszaru nazywamy punkt, który nie należy do obszaru i ma taką własność, że dowolnie blisko tego punktu można znaleźć punkty należące do rozważanego obszaru. Jeśli do obszaru dołączymy jego brzeg, to otrzymamy zbiór punktów zwany *obszarem domkniętym*. Zbiór punktów na płaszczyźnie nazywamy *ograniczonym*, gdy mieści się on w pewnym kole o dostatecznie dużym promieniu.

PRZYKŁADY. Wnętrze krzywej zwykłej zamkniętej[1]) jest obszarem ograniczonym. Wnętrze krzywej zwykłej zamkniętej wraz z punktami krzywej tworzy obszar domknięty ograniczony.

Jeśli $C$ jest krzywą zwykłą zamkniętą i $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są krzywymi zwykłymi zamkniętymi leżącymi wewnątrz $C$ jedna na zewnątrz drugiej, to zbiór punktów leżących wewnątrz $C$, ale na zewnątrz wszystkich $C_1, C_2, \ldots, C_n$, jest obszarem ograniczonym. Przykładami obszarów nieograniczonych są: cała płaszczyzna, półpłaszczyzna, pas między prostymi równoległymi, wnętrze kąta.

---

[1]) Przez krzywą zwykłą zamkniętą będziemy rozumieli krzywą regularną zamkniętą bez punktów wielokrotnych (*przypisek tłumacza*).

Funkcję zmiennej zespolonej $f(z)$ określoną w obszarze $D$ i różniczkowalną w każdym punkcie tego obszaru nazywamy *analityczną* w obszarze $D$.

Funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych $u(x, y)$ określoną w obszarze $D$, mającą w tym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie i spełniającą równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3.32}$$

nazywamy funkcją *harmoniczną* w obszarze $D$.

Istnieje prosty związek między funkcjami analitycznymi i harmonicznymi:

*Część rzeczywista każdej funkcji analitycznej jest funkcją harmoniczną.*

Rzeczywiście, niech

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

będzie funkcją analityczną w obszarze $D$. Załóżmy, że funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie (nie stanowi to żadnego ograniczenia, gdyż jest tak zawsze, ale nie widać tego bezpośrednio z definicji funkcji analitycznej). Różniczkując równania Cauchy-Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

odpowiednio względem $x$ i względem $y$ i uwzględniając niezależność pochodnych cząstkowych od kolejności różniczkowania otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=0.$$

Wobec tego $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w obszarze $D$.

Oczywiście, funkcja $v(x, y)$ też jest funkcją harmoniczną, gdyż jest ona częścią rzeczywistą funkcji analitycznej $-if(z)=v(x, y)-iu(x, y)$.



W przypadku obszaru jednospójnego $D$ (obszar nazywamy *jednospójnym*, gdy każdą krzywą ciągłą zamkniętą leżącą w obszarze można ściągnąć za pomocą przekształcenia ciągłego do jednego punktu, bez wykraczania poza obszar) prawdziwe jest twierdzenie odwrotne:

*Każda funkcja harmoniczna w obszarze jednospójnym $D$ jest częścią rzeczywistą pewnej (jednoznacznej) funkcji analitycznej.*

Rzeczywiście, jeśli $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w obszarze $D$, to można znaleźć taką funkcję $v(x, y)$, która jest związana z $u(x, y)$ równaniami Cauchy-Riemanna

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x};$$

wynika to z faktu, że wyrażenia

$$P=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{i} \quad Q=\frac{\partial u}{\partial x}$$

spełniają warunek

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

gdyż

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Wobec tego $u(x, y)+iv(x, y)$ jest funkcją analityczną zmiennej zespolonej $z=x+iy$ w obszarze $D$.

Funkcję harmoniczną $v(x, y)$ nazywamy funkcją *sprzężoną* do funkcji harmonicznej $u(x, y)$. Widzimy, że jeśli funkcja $u(x, y)$ jest harmoniczna, to wyrażenie

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

jest różniczką zupełną i zagadnienie znalezienia funkcji harmonicznej sprzężonej sprowadza się do zagadnienia scałkowania tej różniczki zupełnej. Funkcja harmoniczna sprzężona jest wyznaczona z dokładnością do dowolnego składnika stałego.

## § 8. CAŁKA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

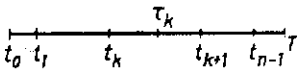
**Całka zwykła funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej**

Niech $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ będzie funkcją zespoloną ciągłą zmiennej rzeczywistej $t$ określoną w przedziale $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (rys. 28).

Dzieląc ten przedział na części za pomocą punktów podziału $t_k$ $(t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1})$ i biorąc z każdej części dowolny punkt $\tau_k$ utwórzmy sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\,\Delta t_k,$$

gdzie $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.




Rys. 28

Gdy największa z różnic $\Delta t_k$ dąży do zera, to napisana suma dąży do granicy, którą nazywamy *całką* i którą oznaczamy symbolem

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt.$$

Jeśli w równości

$$\sum_k f(\tau_k)\,\Delta t_k = \sum_k \varphi(\tau_k)\,\Delta t_k + i \sum_k \psi(\tau_k)\,\Delta t_k$$

przejdziemy do granicy, to otrzymamy wzór

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt + i \int_{t_0}^{T} \psi(t)\,dt.$$

**Całka funkcji zmiennej zespolonej, jej wyrażenie za pomocą całek krzywoliniowych i najprostsze własności**

Niech $f(z)$ będzie funkcją ciągłą zmiennej zespolonej określoną na pewnej krzywej regularnej $AB$ (rys. 29). Podzielmy krzywą



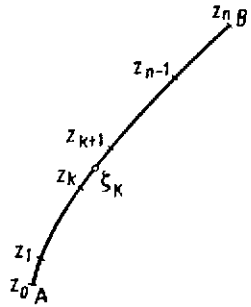
$AB$ na części; niech $z_k$ będą liczbami zespolonymi odpowiadającymi punktom podziału. Na każdej części obierzmy punkt, który odpowiada pewnej liczbie zespolonej $\zeta_k$ (jako $\zeta_k$ możemy wziąć w szczególności $z_k$) i utwórzmy sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\,\Delta z_k,$$

gdzie $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Granicę tej sumy (gdy długość największej spośród części krzywej dąży do zera) nazywamy *całką* funkcji $f(z)$ wzdłuż krzywej $AB$ i oznaczamy symbolem

$$\int_{AB} f(z)\,dz. \tag{3.33}$$




Rys. 29

Całkę (3.33) łatwo można wyrazić za pomocą zwykłych całek krzywoliniowych (stąd będzie również wynikać istnienie całki (3.33), gdy istnienie całek krzywoliniowych przyjmiemy za znane).

Przyjmując $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_k = x_k + iy_k$ będziemy mieli

$$\begin{aligned}
\int_{AB} f(z)\,dz &= \lim \sum_k f(z_k)\,\Delta z_k = \\
&= \lim \sum_k [u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\
&= \lim \sum_k [u(x_k, y_k)\,\Delta x_k - v(x_k, y_k)\,\Delta y_k] + \\
&\quad + i \lim \sum_k [v(x_k, y_k)\,\Delta x_k + u(x_k, y_k)\,\Delta y_k] = \\
&= \int_{AB} u\,dx - v\,dy + i \int_{AB} v\,dx + u\,dy.
\end{aligned}$$

Tak więc

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} u\,dx - v\,dy + i \int_{AB} v\,dx + u\,dy. \tag{3.34}$$

Z bezpośredniego określenia całki (3.33) (a także ze wzoru (3.34)) wynika, że przy zmianie kierunku drogi całkowania całka zmienia znak:

$$\int_{BA} = -\int_{AB};$$

jeśli drogę podzielimy na części, to całka po całej drodze jest równa sumie całek po poszczególnych częściach; całka po drodze zamkniętej nie zależy od wyboru punktu początkowego, natomiast zależy od kierunku obiegu (w przypadku krzywej zwykłej zamkniętej można stosować oznaczenia $\underset{\smile}{\oint}$ i $\underset{\frown}{\oint}$, przy czym $\underset{\smile}{\oint} = -\underset{\frown}{\oint}$); czynniki stałe można wynosić przed znak całki; całka sumy jest równa sumie całek.

**Zamiana całki funkcji zmiennej zespolonej na zwykłą całkę funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej**

Jeśli

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

są równaniami parametrycznymi krzywej $AB$, to $z = z(t)$, gdzie $z(t) = x(t) + iy(t)$ jest równaniem parametrycznym zespolonym łuku $AB$. Wówczas całkę (3.33) funkcji zmiennej zespolonej można zamienić na zwykłą całkę funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej według wzoru

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)\,dt \tag{3.35}$$

(zakładamy, że funkcja $z(t)$ ma ciągłą pochodną względem $t$).

Wzór (3.35) można wyprowadzić w sposób bezpośredni, ale można go też otrzymać z analogicznej reguły dla zwykłych całek krzywoliniowych w sposób następujący:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} u\,dx - v\,dy + i\int_{AB} v\,dx + u\,dy =$$



$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right)dt + i\int_{t_1}^{t_2} \left(v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt}\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (u+iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(z)\frac{dz}{dt}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)\,dt.$$

Przykład. Obliczmy całkę

$$\underset{\smile}{\oint_C} \frac{dz}{z-a},$$

gdzie $C$ jest okręgiem o promieniu $R$ i środku $a = \alpha + i\beta$. Równania parametryczne tego okręgu mają postać

$$\begin{aligned} x &= \alpha + R\cos\varphi, \\ y &= \beta + R\sin\varphi, \end{aligned} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

wobec tego równanie parametryczne zespolone ma postać $z = \alpha + i\beta + R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ lub $z = a + Re^{i\varphi}$. A zatem

$$\underset{\smile}{\oint_C} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\varphi})'d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{3.36}$$

Jeśli $n$ jest liczbą całkowitą $\neq -1$, to

$$\underset{\smile}{\oint_C} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{i\varphi})^n (Re^{i\varphi})'d\varphi = \tag{3.36'}$$

$$= R^{n+1} i\int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\varphi}d\varphi = R^{n+1} i\,\frac{e^{(n+1)i\varphi}}{(n+1)i}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Tak więc dla $n$ całkowitego

$$\frac{1}{2\pi i}\underset{\smile}{\oint_C} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad n \neq -1, \\ 1, & \text{gdy} \quad n = -1. \end{cases} \tag{3.36''}$$

**Oszacowanie modułu całki**

Jeśli na krzywej regularnej $AB$ o długości $L$ zachodzi nierówność $|f(z)| \leqslant M$, gdzie $f(z)$ jest funkcją ciągłą zmiennej zespolonej $z$ określoną na krzywej $AB$, to

$$\left|\sum_k f(z_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_k |f(z_k)|\,|\Delta z_k| \leqslant M \sum_k |\Delta z_k|.$$

Ale $|\Delta z_k|$ jest odległością między punktami $z_k$ i $z_{k+1}$; wobec tego $\sum_k |\Delta z_k|$ jest długością łamanej wpisanej w krzywą $AB$, a zatem

$$\sum_k |\Delta z_k| \leqslant L.$$

Wobec tego

$$\left|\sum_k f(z_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant ML,$$

skąd po przejściu do granicy

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leqslant ML. \tag{3.37}$$

Tak więc moduł całki funkcji ciągłej zmiennej zespolonej wzdłuż krzywej regularnej jest niewiększy od iloczynu długości krzywej przez maksimum funkcji podcałkowej na tej krzywej.

**Przejście do granicy pod znakiem całki**

Niech

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

będzie ciągiem funkcji ciągłych zmiennej zespolonej $z$ określonych na krzywej regularnej $AB$ (o długości $L$), zbieżnym jednostajnie na tej krzywej do funkcji $f(z)$ (oznacza to, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n > N$ i dla wszystkich $z$ leżących na krzywej $AB$ zachodzi nierówność $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$). Funkcja $f(z)$ jest ciągła na krzywej $AB$ (dowodzimy tego tak samo, jak w przypadku zmiennej rzeczywistej). Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_{AB} f_n(z)\,dz = \int_{AB} f(z)\,dz. \tag{3.38}$$



Rzeczywiście, obierając $\varepsilon > 0$ znajdziemy taki wskaźnik $N$, że dla $n > N$ będzie zachodziła nierówność $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ dla każdego $z$ leżącego na krzywej $AB$. Na podstawie wzoru (3.37) otrzymamy

$$\left|\int_{AB} f_n(z)\,dz - \int_{AB} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{AB} [f_n(z) - f(z)]\,dz\right| < \varepsilon L$$

dla $n > N$, co dowodzi wzoru (3.38).

## § 9. TWIERDZENIE PODSTAWOWE CAUCHY'EGO

Niech funkcja

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

będzie analityczna w obszarze jednospójnym $D$. Załóżmy, że pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $u(x, y)$ i $v(x, y)$, których istnienie wynika z analityczności funkcji $f(z)$, są ciągłe w obszarze $D$ (nie stanowi to żadnego ograniczenia, gdyż jest tak zawsze, ale nie widać tego bezpośrednio z definicji funkcji analitycznej). Niech $C$ będzie dowolną krzywą regularną zamkniętą, leżącą w $D$; wówczas na mocy wzoru (3.34)

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i \oint_C v\,dx + u\,dy,$$

ale z warunków Cauchy-Riemanna mamy

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

wobec tego wyrażenia

$$u\,dx - v\,dy, \qquad v\,dx + u\,dy$$

są różniczkami zupełnymi w obszarze jednospójnym $D$, skąd wynika, że ich całki po krzywej zamkniętej $C$ są równe zeru, czyli

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

W ten sposób doszliśmy do następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE PODSTAWOWE CAUCHY'EGO. *Jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze jednospójnym $D$, to całka tej funkcji wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej leżącej w obszarze $D$ jest równa zeru.*

W szczególności, jeśli $C$ jest krzywą zwykłą zamkniętą i funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz tej krzywej i na tej krzywej, to

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{3.39}$$

**Twierdzenie Cauchy'ego dla krzywych złożonych**

Niech $C$ będzie krzywą zwykłą zamkniętą i niech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ będą krzywymi zwykłymi zamkniętymi, leżącymi wewnątrz $C$, jedna na zewnątrz drugiej. Niech funkcja $f(z)$ będzie analityczna w obszarze zawartym między krzywą $C$ i krzywymi $C_1, C_2, \ldots, C_n$, a także na wszystkich tych krzywych. Wówczas

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)dz. \tag{3.39'}$$

Rzeczywiście, przypuśćmy, że na przykład wewnątrz krzywej $C$ (rys. 30) znajdują się dwie krzywe $C'$ i $C''$ i że funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze pomiędzy krzywą $C$ i krzywymi $C'$, $C''$, a także na tych krzywych. Poprowadźmy łuki zwykłe regularne $kl$, $mn$, $pq$ łączące $C$ z $C'$, $C'$ z $C''$ i $C''$ z $C$. Stosując twierdzenie podstawowe Cauchy'ego będziemy mieli

$$\int_{qgklrmnlpq} f(z)dz = 0,$$

$$\int_{khqpunmslk} f(z)dz = 0.$$

Dodając te równości stronami i uwzględniając, że na każdym z łuków $kl$, $mn$, $pq$ całkowanie odbywa się dwa razy w kierunkach przeciwnych, otrzymamy

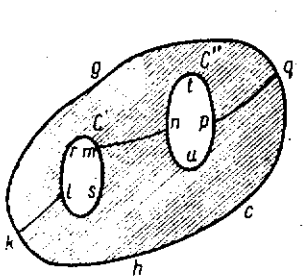
$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C'} f(z)dz + \oint_{C''} f(z)dz = 0$$



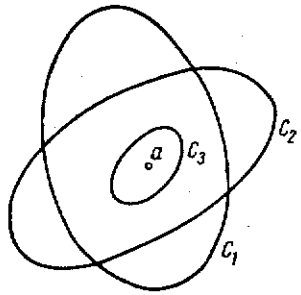
lub

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C'} f(z)dz + \oint_{C''} f(z)dz.$$

W szczególności, jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ z wyjątkiem samego punktu $a$, to całki po wszystkich dostatecznie małych krzywych zwykłych zamkniętych otaczających punkt $a$ (skierowanych jednakowo, na przykład dodatnio)




Rys. 30




Rys. 31

są równe. Rzeczywiście, niech $C_1$ i $C_2$ będą dostatecznie małymi krzywymi zamkniętymi otaczającymi punkt $a$ (rys. 31) i niech $C_3$ będzie krzywą zamkniętą otaczającą punkt $a$ i leżącą równocześnie wewnątrz $C_1$ i wewnątrz $C_2$. Na mocy tego, co udowodniliśmy,

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_3} f(z)dz, \qquad \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_3} f(z)dz,$$

skąd

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} (fz)dz.$$

Wzór (3.39') można przepisać w postaci

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)dz = 0$$

lub

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

gdzie $\Gamma$ jest krzywą złożoną utworzoną z krzywej zewnętrznej $C$ i krzywych wewnętrznych $C_1, \ldots, C_n$, przy czym kierunek dodatni obiegu krzywej $\Gamma$ jest wyznaczony przez warunek, że obszar ograniczony krzywą $\Gamma$ ma pozostawać podczas obiegu po stronie lewej (czyli krzywa zewnętrzna jest skierowana dodatnio, a krzywe wewnętrzne są skierowane ujemnie).

**Całka o zmiennej górnej granicy całkowania**

Niech funkcja $f(z)$ będzie analityczna w obszarze jednospójnym $D$. Ponieważ całki tej funkcji po drogach zamkniętych leżących w obszarze $D$ są równe zeru, więc całka funkcji $f(z)$ nie zależy od kształtu drogi i zależy tylko od punktu początkowego oraz punktu końcowego drogi. Dlatego przy oznaczaniu całki nie trzeba wskazywać drogi i wystarczy tylko podać początek $z_1$ i koniec $z_2$ drogi stosując oznaczenie

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

Rozważmy funkcję (całkę o zmiennej górnej granicy całkowania)

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Mamy

$$F(z+h)-F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad 1 = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} d\zeta,$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,d\zeta,$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta.$$



Ponieważ funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $z$, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\eta > 0$, że dla $|\zeta - z| < \eta$ zachodzi nierówność $|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$. Biorąc jako drogę łączącą punkty $z$ i $z+h$ odcinek linii prostej i stosując oszacowanie (3.37) otrzymamy dla $|h| < \eta$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}|h|\,\varepsilon = \varepsilon,$$

skąd wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z), \qquad \text{czyli} \qquad F'(z) = f(z).$$

Tak więc funkcja analityczna ma zawsze funkcję pierwotną. Jako taką funkcję pierwotną można wziąć całkę o zmiennej górnej granicy całkowania.

LEMAT. *Jeśli w pewnym obszarze zachodzi równość* $\Phi'(z) = 0$, *to w tym obszarze* $\Phi(z) = \text{const}$.

Przyjmując $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, z warunku $\Phi'(z) = 0$ znajdujemy, że

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

ale w takim razie $u = \text{const}$ i $v = \text{const}$, czyli $\Phi(z) = \text{const}$.

Z tego lematu wynika, że każde dwie funkcje pierwotne funkcji danej różnią się o stałą. Rzeczywiście, jeśli $F_1'(z) = F_2'(z)$, to $\{F_2(z)-F_1(z)\}' = F_2'(z)-F_1'(z) = 0$ i wobec tego na podstawie lematu $F_2(z)-F_1(z) = \text{const}$.

Jeśli symbolem $\int f(z)\,dz$ oznaczymy dowolną funkcję pierwotną funkcji analitycznej $f(z)$, to na podstawie poprzedniego

$$\int f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C,$$

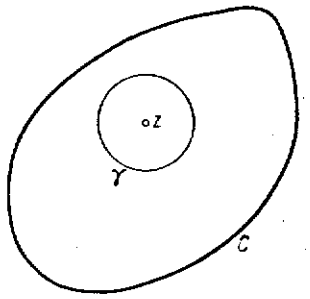
gdzie $C$ jest dowolną liczbą zespoloną.

Uwaga. Technika poszukiwania funkcji pierwotnych (technika całkowania) funkcji analitycznych nie różni się pod względem formalnym od techniki całkowania funkcji elementarnych zmiennej rzeczywistej i nie będziemy się nią zajmowali.

## § 10. WZÓR CAŁKOWY CAUCHY'EGO

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze ograniczonym krzywą zwykłą zamkniętą $C$ (rys. 32) i na tej krzywej. Weźmy ustalony punkt $z$ wewnątrz $C$ i utwórzmy funkcję

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}.$$



Rys. 32

Funkcja $\varphi(\zeta)$ jest analityczna we wszystkich punktach leżących wewnątrz krzywej $C$ i na krzywej $C$ z wyjątkiem punktu $z$. Jednakże dla $\zeta \to z$ mamy $\varphi(\zeta) \to f'(z)$; jeśli więc funkcję $\varphi(\zeta)$ określimy dodatkowo w punkcie $z$ równością $\varphi(z) = f'(z)$, to funkcja $\varphi(\zeta)$ będzie funkcją ciągłą w obszarze domkniętym ograniczonym wyznaczonym przez krzywą $C$. A więc funkcja $\varphi(\zeta)$ jest ograniczona.

Inaczej mówiąc, w rozważanym obszarze zachodzi nierówność $|\varphi(\zeta)| < K$, gdzie $K$ jest pewną liczbą dodatnią.

Niech $\gamma$ będzie okręgiem o promieniu $\varrho$ i środku $z$ leżącym wewnątrz $C$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla krzywej złożonej mamy

$$\oint_C \varphi(\zeta)\,d\zeta = \oint_\gamma \varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Na mocy reguły szacowania całki (3.37) mamy

$$\left|\oint_\gamma \varphi(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant 2\pi\varrho K.$$



Wobec tego, przechodząc w ostatniej równości do granicy przy $\varrho \to 0$, otrzymamy

$$\oint_C \varphi(\zeta)\,d\zeta = 0$$

lub

$$\oint_C \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0$$

lub

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - f(z)\oint_C \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 0.$$

Ale na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla krzywej złożonej i na mocy wzoru (3.36)

$$\oint_C \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i.$$

Wobec tego poprzednia równość przybiera postać

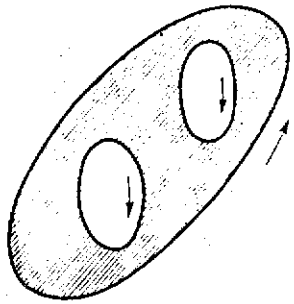
$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} - 2\pi i f(z) = 0,$$

skąd

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{3.40}$$

Wzór (3.40) nosi nazwę *wzoru całkowego Cauchy'ego* i jest podstawowym wzorem teorii funkcji analitycznych. Ze wzoru (3.40) wynika, że wartości funkcji analitycznej wewnątrz krzywej $C$ są całkowicie wyznaczone przez wartości tej funkcji na krzywej $C$. Prawą stronę wzoru (3.40) nazywamy *całką Cauchy'ego*.

Zamiast krzywej zwykłej zamkniętej $C$ można brać krzywą złożoną $\Gamma$ składającą się z krzywej zewnętrznej i kilku krzywych wewnętrznych (rys. 33). Stosując w tym przypadku identyczne



Rys. 33

rozumowanie dojdziemy do wniosku, że jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze ograniczonym krzywą złożoną $\Gamma$ i na tej krzywej, to dla każdego punktu $z$ leżącego w tym obszarze zachodzi równość

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.40'}$$

Jest to wzór całkowy Cauchy'ego dla krzywej złożonej.

## § 11. CAŁKA TYPU CAUCHY'EGO

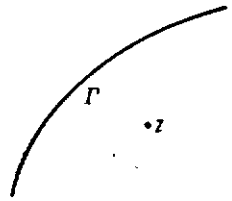
Niech $\Gamma$ będzie krzywą regularną (zamkniętą albo nie). Niech $\varphi(\zeta)$ będzie funkcją ciągłą określoną na krzywej $\Gamma$ (rys. 34). Wyrażenie

$$\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{3.41}$$



mające sens dla wszystkich wartości $z$ nie leżących na $\Gamma$ (gdyż wyrażenie podcałkowe jest wówczas funkcją ciągłą na $\Gamma$) nazywamy *całką typu Cauchy'ego*. Całką typu Cauchy'ego nazywamy również wyrażenie postaci ogólniejszej

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}\,d\zeta, \tag{3.41'}$$




Rys. 34

gdzie $k$ jest liczbą naturalną.

Wykażemy, że wyrażenie (3.41') jest funkcją analityczną dla wszystkich wartości $z$ nie leżących na krzywej $\Gamma$. Uwzględniając wzór

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1})$$

otrzymujemy

$$\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z)}{z_1 - z} = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_1)^k} - \int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^k}}{z_1 - z} =$$

$$= \int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,\frac{\dfrac{1}{(\zeta - z_1)^k} - \dfrac{1}{(\zeta - z)^k}}{z_1 - z}\,d\zeta = \int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,\frac{(\zeta - z)^k - (\zeta - z_1)^k}{(z_1 - z)(\zeta - z_1)^k(\zeta - z)^k}\,d\zeta =$$

$$= \int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,\frac{(\zeta - z)^{k-1} + (\zeta - z)^{k-2}(\zeta - z_1) + \ldots + (\zeta - z_1)^{k-1}}{(\zeta - z_1)^k(\zeta - z)^k}\,d\zeta.$$

Ustalając $z$ i przyjmując

$$\Psi(\zeta, z_1) = \frac{(\zeta - z)^{k-1} + (\zeta - z)^{k-2}(\zeta - z_1) + \ldots + (\zeta - z_1)^{k-1}}{(\zeta - z_1)^k(\zeta - z)^k}$$

możemy napisać

$$\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z)}{z_1 - z} = \int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\Psi(\zeta, z_1)\,d\zeta.$$

Oczywiście $\Psi(\zeta, z_1)$ jest funkcją ciągłą zmiennych $\zeta, z_1$, gdy $\zeta$ leży na $\Gamma$ i $z_1$ nie leży na $\Gamma$.

Funkcja $\Psi(\zeta, z_1)$ jest funkcją jednostajnie ciągłą zmiennych $\zeta$, $z_1$, gdy $\zeta$ leży na $\Gamma$, a $z_1$ leży w kole o środku $z$ nie mającym punktów wspólnych z krzywą $\Gamma$ (na mocy twierdzenia o ciągłości jednostajnej funkcji ciągłej na zbiorze domkniętym ograniczonym). Stąd wynika, że jeśli $z_1 \to z$, to $\Psi(\zeta, z_1) \to \Psi(\zeta, z)$ jednostajnie względem $\zeta$ leżącego na $\Gamma$. Dlatego zastosowane dalej przejście do granicy pod znakiem całki jest dozwolone.

Przechodząc do granicy przy $z_1 \to z$ otrzymujemy

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{\Phi(z_1)-\Phi(z)}{z_1-z} = \int_\Gamma \varphi(\zeta)\Psi(\zeta, z)\,d\zeta.$$

Uwzględniając, że

$$\Psi(\zeta, z) = \frac{k}{(\zeta-z)^{k+1}}$$

i że

$$\frac{k\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right],$$

dochodzimy do wzoru

$$\Phi'(z) = k\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right]d\zeta.$$

Tak więc funkcja $\Phi(z)$ ma pochodną w każdym punkcie $z$ nie leżącym na $\Gamma$.

A zatem jeśli funkcja $\varphi(\zeta)$ jest ciągła na krzywej regularnej $\Gamma$, to funkcja

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\,d\zeta$$

jest analityczna dla wszystkich wartości $z$ nie leżących na $\Gamma$, przy czym pochodną tej funkcji otrzymujemy według reguły różniczkowania pod znakiem całki

$$\Phi'(z) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right]d\zeta = k\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta. \tag{3.42}$$



Wyrażenie na $\Phi'(z)$ jest znów typu (3.41'), a więc można do niego stosować wszystko, co powiedzieliśmy o $\Phi(z)$. Stąd wynika, że funkcja określona wzorem

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\,d\zeta$$

ma dla wszystkich $z$ nie leżących na $\Gamma$ pochodne wszystkich rzędów, przy czym te pochodne otrzymujemy według reguły kolejnego różniczkowania pod znakiem całki:

$$\Phi^{(n)}(z) = \int_\Gamma \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\right]d\zeta = \tag{3.43}$$

$$= k(k+1)\ldots(k+n-1)\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+n}}.$$

## § 12. POCHODNE RZĘDÓW WYŻSZYCH FUNKCJI ANALITYCZNEJ

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w pewnym obszarze $D$. Niech $C$ będzie krzywą zamkniętą leżącą wraz ze swym wnętrzem w tym obszarze. Dla wszystkich punktów $z$ leżących wewnątrz tej krzywej mamy na mocy wzoru całkowego Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Ale całka Cauchy'ego występująca po stronie prawej jest szczególnym przypadkiem całki typu Cauchy'ego. Wobec tego na mocy wyników § 11 funkcja $f(z)$ ma wewnątrz $C$ pochodne wszystkich rzędów i na mocy (3.43) pochodne te wyrażają się wzorami

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{3.44}$$

Ponieważ dowolny punkt obszaru $D$ można otoczyć krzywą zamkniętą leżącą (wraz ze swoim wnętrzem) w obszarze $D$, więc dochodzimy do następującego wniosku: **każda funkcja analityczna w pewnym obszarze ma w tym obszarze pochodne wszystkich rzędów i wszystkie te pochodne są funkcjami analitycznymi w rozważanym obszarze.**

Należy zauważyć, że funkcje zmiennej rzeczywistej nie mają tej własności. Funkcja zmiennej rzeczywistej może mieć pierwszą pochodną i nie mieć drugiej pochodnej.

## § 13. CIĄGI I SZEREGI FUNKCJI ANALITYCZNYCH

Powiemy, że ciąg funkcji

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

określonych w pewnym obszarze $D$ jest *zbieżny jednostajnie* wewnątrz obszaru $D$, gdy jest on zbieżny jednostajnie w każdym obszarze domkniętym ograniczonym zawartym w $D$.

TWIERDZENIE. *Jeśli ciąg funkcji analitycznych w obszarze $D$*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

*jest zbieżny jednostajnie wewnątrz obszaru $D$ do funkcji $f(z)$, to $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze $D$ i ciąg pochodnych*

$$f_1'(z),\ f_2'(z),\ \ldots,\ f_n'(z),\ \ldots$$

*jest zbieżny jednostajnie wewnątrz obszaru $D$ do pochodnej funkcji granicznej, tzn. do $f'(z)$.*

Niech $C$ będzie krzywą zamkniętą leżącą wraz ze swym wnętrzem w obszarze $D$ i niech $z$ będzie punktem leżącym wewnątrz $C$. Na podstawie wzoru Cauchy'ego

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

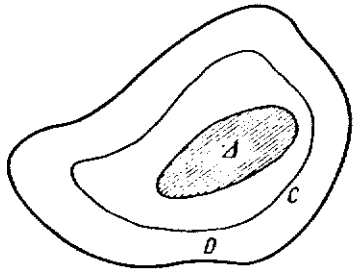


Ponieważ $f_n(\zeta)\to f(\zeta)$ jednostajnie na $C$, więc

$$\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\to\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

jednostajnie na $C$ (przy ustalonym $z$). Wobec tego na mocy reguły przechodzenia do granicy pod znakiem całki (3.38)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$



Rys. 35

Tak więc wewnątrz krzywej $C$ funkcja graniczna $f(z)$ wyraża się całką typu Cauchy'ego, a zatem jest funkcją analityczną. Ponieważ każdy punkt obszaru $D$ można otoczyć taką krzywą $C$, więc funkcja graniczna $f(z)$ jest analityczna w całym obszarze $D$.

Niech teraz $\Delta$ będzie dowolnym obszarem domkniętym ograniczonym, leżącym w obszarze $D$ (rys. 35). Niech $C$ będzie krzywą zamkniętą o długości $L$ leżącą wraz ze swoim wnętrzem w obszarze $D$ i taką, że $\Delta$ leży wewnątrz $C$. Niech $\delta$ będzie odległością między $C$ i $\Delta$ (tzn. najmniejszą spośród odległości punktów $C$ od punktów $\Delta$). Dla $z$ leżącego w obszarze $\Delta$ mamy (na mocy wzoru (3.44) przy $n=1$)

$$f_n'(z)-f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

Ale $f_n(\zeta)\to f(\zeta)$ jednostajnie na $C$ i wobec tego dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n>N$ i wszystkich punktów $\zeta$ leżących na $C$ zachodzi nierówność $|f_n(\zeta)-f(\zeta)|<\varepsilon$.

Jeśli więc do ostatniego wzoru zastosujemy regułę szacowania modułu całki, to otrzymamy nierówność

$$|f_n'(z)-f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} L \frac{\varepsilon}{\delta^2}$$

dla $n > N$ i dla dowolnego $z$ leżącego w obszarze $\Delta$. W ten sposób udowodniliśmy, że $f_n'(z) \to f'(z)$ jednostajnie w dowolnym obszarze domkniętym ograniczonym $\Delta$ leżącym w $D$.

Uwaga. Widzimy, że ciąg pochodnych $f_n'(z)$ spełnia wszystkie założenia, które spełniał ciąg $f_n(z)$. Wobec tego do ciągu $f_n'(z)$ również można stosować udowodnione twierdzenie.

A zatem, jeśli ciąg funkcji $f_n(z)$ analitycznych w obszarze $D$ jest zbieżny jednostajnie wewnątrz $D$ do funkcji $f(z)$, to ciąg pochodnych dowolnego rzędu funkcji $f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie wewnątrz $D$ do pochodnej tego samego rzędu funkcji $f(z)$.

Przypuśćmy teraz, że mamy szereg funkcyjny

$$\sum \varphi_n(z),$$

którego wyrazy są funkcjami analitycznymi w obszarze $D$. Z tego, co udowodniliśmy, wynika, że jeśli ten szereg jest zbieżny jednostajnie wewnątrz $D$, to jego suma jest funkcją analityczną w obszarze $D$ i szereg można różniczkować dowolną ilość razy wyraz po wyrazie, przy czym wszystkie otrzymane w wyniku różniczkowań szeregi są zbieżne jednostajnie wewnątrz $D$.

**Analityczność sumy szeregu potęgowego**

Niech

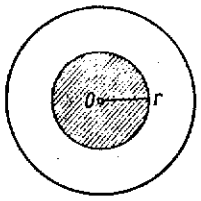
$$\sum_0^\infty A_n z^n$$

będzie szeregiem potęgowym i niech $R$ będzie jego promieniem zbieżności. Niech $0 < r < R$. Ponieważ punkt $r$ leży wewnątrz koła zbieżności (rys. 36), więc jest punktem zbieżności bezwzględnej szeregu potęgowego, tzn. szereg $\sum |A_n r^n|$ jest zbieżny. Dla $|z| \leqslant r$ mamy $|A_n z^n| \leqslant |A_n r^n|$, a zatem szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie w kole $|z| \leqslant r$. Ponieważ dowolny obszar



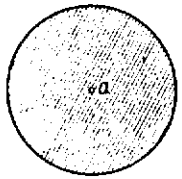
domknięty leżący wewnątrz koła zbieżności mieści się w pewnym kole $|z| \leqslant r$ przy odpowiednim wyborze liczby $r < R$, więc dochodzimy do wniosku następującego: każdy szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie wewnątrz koła zbieżności.

Uwaga. Na wnętrzu koła zbieżności zbieżność może być niejednostajna.

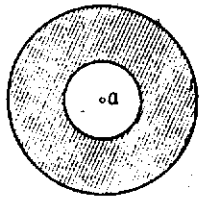


Rys. 36

Ponieważ wyrazy szeregu potęgowego $A_n z^n$ są funkcjami analitycznymi, więc z udowodnionego twierdzenia wynika, że suma szeregu potęgowego jest funkcją analityczną wewnątrz koła zbieżności i że szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie wewnątrz koła zbieżności dowolną ilość razy. Wobec tego szeregi potęgowe otrzymane w wyniku różniczkowań mają niemniejszy promień zbieżności (w rzeczywistości mają taki sam promień zbieżności).



Rys. 37



Rys. 38

Analogicznie szereg potęgowy

$$\sum_0^\infty A_n (z-a)^n$$

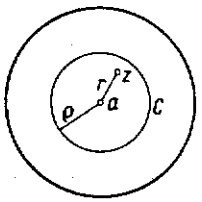
jest zbieżny jednostajnie wewnątrz koła o środku w punkcie $a$ (rys. 37) i jego suma jest funkcją analityczną we wnętrzu tego koła. Szereg

$$\sum_{-\infty}^\infty A_n (z-a)^n$$

mający pewien pierścień zbieżności (rys. 38) jest zbieżny jednostajnie wewnątrz pierścienia i jego suma jest funkcją analityczną we wnętrzu tego pierścienia. W obydwu tych przypadkach wolno różniczkować szereg wyraz po wyrazie dowolną ilość razy.

## § 14. SZEREG TAYLORA

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną wewnątrz koła o środku $a$ (promień tego koła może być w szczególności równy $+\infty$; wtedy koło stanie się całą płaszczyzną).



Rys. 39

Niech $z$ będzie punktem leżącym wewnątrz danego koła i niech $C$ będzie kołem współśrodkowym o promieniu mniejszym, takim, że $z$ leży wewnątrz $C$ (rys. 39). Niech $r = |z-a|$ i niech $\varrho$ będzie promieniem koła $C$. Na mocy wzoru Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Dla każdego punktu $\zeta$ leżącego na $C$ mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

i ponieważ

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = \frac{r}{\varrho} < 1,$$

więc ostatnie wyrażenie można uważać za sumę wyrazów postępu geometrycznego zbieżnego do zera o pierwszym wyrazie $1/(\zeta - a)$ i o ilorazie $(z-a)/(\zeta - a)$. Tak więc

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Przy ustalonym $z$ napisany szereg jest zbieżny jednostajnie względem punktów $\zeta$ leżących na $C$, gdyż moduły wyrazów tego szeregu są równe odpowiednim wyrazom szeregu geometrycznego zbieżnego

$$\sum \frac{r^n}{\varrho^{n+1}}.$$



Mnożąc poprzednią równość przez $f(\zeta)$, całkując wyraz po wyrazie na okręgu $C$ i dzieląc obie strony przez $2\pi i$, otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

lub

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n,$$

gdzie

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

przy czym $\Gamma$ jest dowolnym ustalonym okręgiem o środku $a$ leżącym wewnątrz koła danego na początku (zamiast okręgu $C$ można wziąć okrąg $\Gamma$, gdyż funkcja $f(\zeta)/(\zeta - a)^{n+1}$ jest analityczna między okręgami $C$ i $\Gamma$ oraz na tych okręgach).

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE. *Każda funkcja $f(z)$ analityczna wewnątrz koła o środku $a$ daje się rozwinąć wewnątrz tego koła w szereg potęgowy*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} A_n (z-a)^n, \tag{3.45}$$

*którego współczynniki wyrażają się wzorami*

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.46}$$

*gdzie $\Gamma$ jest dowolnym okręgiem o środku $a$ leżącym wewnątrz koła danego.*

Ten szereg potęgowy nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji $f(z)$ w rozważanym kole.

Przypuśćmy, że funkcja $f(z)$ została rozwinięta w kole o środku $a$ w jakiś szereg potęgowy

$$\sum_0^\infty A_k(z-a)^k.$$

Niech $\Gamma$ będzie okręgiem współśrodkowym o promieniu mniejszym. Na okręgu $\Gamma$ ten szereg jest zbieżny jednostajnie. Jeśli równość

$$f(z) = \sum_0^\infty A_k(z-a)^k$$

pomnożymy przez $1/(z-a)^{n+1}$, następnie scałkujemy wyraz po wyrazie wzdłuż okręgu $\Gamma$ i wreszcie pomnożymy obustronnie przez $1/2\pi i$, to otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint}_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{2\pi i}\underbrace{\oint}_{\Gamma}(z-a)^{k-n-1}dz = A_n,$$

gdyż na mocy (3.36'')

$$\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint}_{\Gamma}(z-a)^{k-n-1}dz = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k \neq n, \\ 1 & \text{dla} \quad k = n. \end{cases}$$

W ten sposób udowodniliśmy jednoznaczność rozwinięcia funkcji analitycznej w kole o środku $a$ w szereg potęgowy według potęg $z-a$.

LEMAT. *Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze $D$. Jeśli funkcja $f(z)$ jest równa zeru w pewnym obszarze $d$ zawartym w $D$, to jest tożsamościowo równa zeru w całym obszarze $D$.*

Zauważmy najpierw fakt następujący. Ze wzoru (3.46) wynika, że jeśli funkcja jest analityczna wewnątrz pewnego koła $K$ i jest równa zeru w kole współśrodkowym $k$ o promieniu mniejszym (rys. 40), to jest równa zeru wewnątrz koła $K$. Rzeczywiście, biorąc jako okrąg $\Gamma$ dowolny okrąg współśrodkowy leżący wewnątrz koła mniejszego $k$, znajdujemy ze wzoru (3.46), że wszystkie współczynniki $A_n$ są równe zeru, czyli na podstawie wzoru (3.45) $f(z) = 0$ wewnątrz $K$.

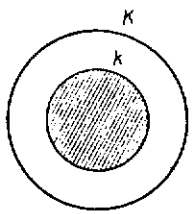
Weźmy teraz ciąg skończony kół leżących w obszarze $D$

$$K_1, K_2, \ldots, K_n,$$

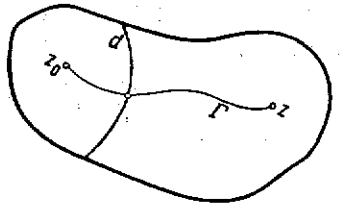


o tej własności, że środek każdego koła leży wewnątrz koła poprzedniego, środek koła pierwszego leży w obszarze $d$, środek koła ostatniego leży w dowolnie obranym punkcie $z$ obszaru $D$. Taki ciąg kół można zbudować na przykład w sposób następujący (rys. 41). Punkt $z_0$ leżący w obszarze $d$ połączmy z punktem $z$ krzywą prostowalną $\Gamma$ leżącą w obszarze $D$. Niech $\delta$ będzie liczbą dodatnią mniejszą od odległości krzywej $\Gamma$ od brzegu obszaru $D$. Podzielmy krzywą $\Gamma$ na skończoną ilość części o długościach mniejszych od $\delta$. Wówczas ciąg kół o promieniu $\delta$ i o środkach w punktach podziału spełnia wszystkie wymagane warunki.

Stosując poprzednią uwagę znajdujemy kolejno, że funkcja $f(z)$ jest równa zeru wewnątrz $K_1$, wewnątrz $K_2$, ..., wewnątrz $K_n$. Tak więc dla dowolnego punktu $z$ obszaru $D$ otrzymujemy $f(z) = 0$.




Rys. 40




Rys. 41

Łatwo widzieć, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze $D$ nie równą tożsamościowo zeru, to wokół każdego punktu $a$ obszaru $D$ można opisać takie koło leżące w $D$, że wewnątrz tego koła — być może z wyjątkiem punktu $a$ — funkcja $f(z)$ jest różna od zera.

Rzeczywiście, opiszmy wokół $a$ koło leżące w $D$. Na mocy lematu funkcja $f(z)$ nie może być w tym kole tożsamościowo równa zeru. Wobec tego nie wszystkie współczynniki rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szereg Taylora w tym kole są równe zeru. Niech $A_n$ $(n \geqslant 0)$ będzie pierwszym różnym od zera współczynnikiem w rozwinięciu

$$f(z) = \sum_0^\infty A_k(z-a)^k.$$

Wówczas

$$f(z) = A_n(z-a)^n + A_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots = (z-a)^n\varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z) = A_n + A_{n+1}(z-a) + \ldots$

Funkcja $\varphi(z)$ jest ciągła w punkcie $a$ i $\varphi(a) = A_n \neq 0$; wobec tego w dostatecznie małym kole współśrodkowym o promieniu mniejszym jest $\varphi(z) \neq 0$, a więc w tym kole $f(z) \neq 0$ z wyjątkiem być może punktu $a$.

Punkt $a$ nazywamy *zerem* funkcji $f(z)$, gdy $f(a) = 0$. Z ostatniego twierdzenia wynika, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze $D$ nie równą tożsamościowo zeru, to wszystkie jej zera w obszarze $D$ są *odosobnione* (tzn. wokół każdego z nich można opisać takie koło, które nie zawiera innych zer). Mówimy, że $a$ jest *zerem n-krotnym* funkcji $f(z)$ (nie równej tożsamościowo zeru), gdy rozwinięcie w szereg potęgowy w otoczeniu $a$ zaczyna się od potęgi $n$-tej, tzn. gdy w otoczeniu $a$ mamy $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją analityczną taką, że $\varphi(a) \neq 0$.

TWIERDZENIE O JEDNOZNACZNOŚCI. *Jeśli dwie funkcje analityczne w obszarze $D$ są równe na zbiorze punktów mającym co najmniej jeden punkt skupienia leżący w $D$, to te dwie funkcje są tożsamościowo równe.*

Rzeczywiście, niech $a$ będzie takim punktem skupienia. Wówczas różnica funkcji rozważanych jest równa zeru w punktach leżących dowolnie blisko $a$ i różnych od $a$. Na mocy tego, co udowodniliśmy, może tak być tylko wtedy, gdy ta różnica jest tożsamościowo równa zeru.

Korzystając ze wzoru (3.44) możemy zapisać wzór (3.46) na współczynniki szeregu Taylora w postaci

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

**Oszacowanie modułów współczynników szeregu Taylora**

Przypuśćmy, że na okręgu $\Gamma$ moduł funkcji $f(z)$ jest niewiększy od $M$. Oznaczając promień okręgu $\Gamma$ przez $R$ i szacując całkę występującą we wzorze (3.46) według reguły szacowania modułu całki (3.37) otrzymujemy

$$|A_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{n+1}}\, 2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

Tak więc otrzymujemy nierówności

$$|A_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.48}$$



Ze wzoru (3.48) wynikają od razu *twierdzenie Liouville'a*: *funkcja całkowita* (tzn. analityczna na całej płaszczyźnie) *ograniczona na całej płaszczyźnie jest stała*.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że na całej płaszczyźnie

$$f(z) = \sum_0^\infty A_n z^n, \qquad |f(z)| \leqslant M.$$

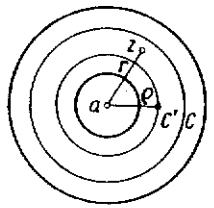
Wówczas dla dowolnego $R$ mamy $|A_n| \leqslant M/R^n$, skąd przechodząc do granicy przy $R \to \infty$ znajdujemy (dla $n > 0$) $|A_n| \leqslant 0$, tzn. $A_n = 0$. Wobec tego $f(z) = A_0 = \text{const}$.

Z twierdzenia Liouville'a wynika łatwo podstawowe twierdzenie algebry wyższej: *każdy wielomian różny od zera ma przynajmniej jeden pierwiastek*.

Rzeczywiście, gdyby wielomian $P(z)$ nie miał pierwiastków, to funkcja $1/P(z)$ byłaby całkowita. Ponieważ wiadomo, że $P(z) \to \infty$ gdy $z \to \infty$, więc $1/P(z) \to 0$, gdy $z \to \infty$, a zatem funkcja $1/P(z)$ byłaby ograniczona na całej płaszczyźnie. Ale w takim razie, na mocy twierdzenia Liouville'a $1/P(z) = \text{const}$, czyli $P(z) = \text{const}$, co przeczy założeniu.

## § 15. SZEREG LAURENTA

Niech funkcja $f(z)$ będzie analityczna wewnątrz pierścienia (rys. 42) zawartego między dwoma okręgami o środku $a$ (jeśli promień okręgu wewnętrznego jest równy 0, to pierścień staje się kołem z usuniętym środkiem; jeśli promień okręgu zewnętrznego jest równy $\infty$, to pierścień staje się identyczny z częścią płaszczyzny leżącą na zewnątrz koła; jeśli obydwa przypadki zachodzą równocześnie, to pierścień staje się płaszczyzną z usuniętym jednym punktem). Niech $z$ będzie punktem leżącym wewnątrz tego pierścienia i niech $C$ oraz $C'$ będą okręgami współśrodkowymi, leżącymi wewnątrz pierścienia i takimi, że $z$ leży wewnątrz $C$ i na zewnątrz $C'$. Na mocy wzoru Cauchy'ego dla krzywej złożonej



Rys. 42

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z - \zeta}.$$

Na mocy rozważań z § 14 pierwszy składnik po prawej stronie można przedstawić w postaci szeregu

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_0^\infty A_n(z-a)^n,$$

gdzie

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

przy czym $\Gamma$ jest dowolnym ustalonym okręgiem współśrodkowym leżącym wewnątrz pierścienia.

Pozostaje do przekształcenia składnik drugi

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}.$$

Przyjmijmy $|z-a| = r$ i oznaczmy promień koła $C'$ przez $\varrho$. Dla punktu $\zeta$ leżącego na $C'$ mamy

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a-(\zeta-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}$$

i ponieważ

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{\varrho}{r} < 1,$$

więc ostatnie wyrażenie można traktować jako sumę wyrazów postępu geometrycznego zbieżnego do zera o pierwszym wyrazie $1/(z-a)$ i o ilorazie $(\zeta-a)/(z-a)$. Tak więc

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} + \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^\infty \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Napisany szereg jest zbieżny jednostajnie względem $\zeta$ leżącego na $C'$ (przy ustalonym $z$), gdyż moduły wyrazów tego szeregu



są równe odpowiednim wyrazom szeregu geometrycznego zbieżnego

$$\sum \frac{\varrho^{n-1}}{r^n}.$$

Mnożąc ostatnią równość przez $f(\zeta)$, całkując wyraz po wyrazie na okręgu $C'$ i dzieląc obie strony przez $2\pi i$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = \sum_{n=1}^\infty A_{-n}(z-a)^{-n},$$

gdzie

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}}$$

(zamiast okręgu $C'$ można wziąć okrąg $\Gamma$, gdyż funkcja $f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}$ jest analityczna między okręgami $C'$ i $\Gamma$ oraz na tych okręgach).

Dodając rozwinięcia

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$$

otrzymujemy rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg według potęg całkowitych $z-a$ z wykładnikami $\gtrless 0$. W ten sposób udowodniliśmy następujące

TWIERDZENIE. *Każda funkcja $f(z)$ analityczna wewnątrz pierścienia o środku $a$ daje się rozwinąć wewnątrz tego pierścienia w szereg*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^\infty A_n(z-a)^n, \tag{3.49}$$

*którego współczynniki wyrażają się wzorami*

$$(3.50)\quad A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

*gdzie $\Gamma$ jest dowolnym okręgiem o środku $a$ leżącym wewnątrz danego pierścienia.*

Szereg (3.49) nazywamy *szeregiem Laurenta* funkcji $f(z)$ w rozważanym punkcie.

Jeśli funkcja $f(z)$ została rozwinięta w pierścieniu o środku $a$ w dowolny szereg postaci

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n,$$

to rozumując tak samo jak w odpowiednim miejscu w § 14 otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = A_n,$$

gdzie $\Gamma$ jest okręgiem o środku $a$ leżącym wewnątrz pierścienia.

W ten sposób udowodniliśmy jednoznaczność rozwinięcia funkcji analitycznej w pierścieniu o środku $a$ w szereg według potęg całkowitych ($\gtrless 0$) $z-a$.

**Oszacowanie modułów współczynników szeregu Laurenta**

Przypuśćmy, że na okręgu współśrodkowym $\Gamma$ leżącym wewnątrz pierścienia moduł funkcji $f(z)$ jest niewiększy od $M$. Jeśli promień tego okręgu oznaczymy przez $R$, to postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu nierówności (3.48) otrzymamy nierówności

$$(3.51)\qquad |A_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



## § 16. PUNKTY OSOBLIWE ODOSOBNIONE FUNKCJI ANALITYCZNYCH

Punkty, w których funkcja przestaje być analityczna, nazywamy *punktami osobliwymi*. Jeśli w dostatecznie małym otoczeniu punktu osobliwego $a$ nie ma innych punktów osobliwych, to punkt osobliwy $a$ nazywamy *punktem osobliwym odosobnionym*. Jeśli $a$ jest punktem osobliwym odosobnionym funkcji $f(z)$, to w dostatecznie małym kole z usuniętym środkiem $a$ funkcja $f(z)$ jest analityczna i rozwija się wobec tego w szereg Laurenta

$$(3.52)\qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k(z-a)^k.$$

A priori są możliwe i wykluczają się wzajemnie trzy następujące przypadki:

1) w rozwinięciu (3.52) nie ma wyrazów o wykładnikach ujemnych,

2) w rozwinięciu (3.52) występuje tylko skończona ilość wyrazów o wykładnikach ujemnych,

3) w rozwinięciu (3.52) występuje nieskończenie wiele wyrazów o wykładnikach ujemnych.

W przypadku 1) mówimy, że punkt $a$ jest punktem *pozornie osobliwym* albo że funkcja $f(z)$ ma w punkcie $a$ *osobliwość usuwalną*. W przypadku 2) mówimy, że punkt $a$ jest *biegunem*. W przypadku 3) mówimy, że punkt $a$ jest *punktem istotnie osobliwym*.

Jeśli punkt $a$ jest pozornie osobliwy, to w otoczeniu punktu $a$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} A_k(z-a)^k,$$

a więc po odpowiednim określeniu wartość funkcji w punkcie $a$ (mianowicie $f(a) = A_0$) funkcja $f(z)$ będzie analityczna w punkcie $a$ i osobliwość zostanie usunięta. W dostatecznie małym otoczeniu punktu pozornie osobliwego funkcja $f(z)$ jest ograniczona. Na odwrót, jeśli funkcja $f(z)$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu punktu osobliwego odosobnionego $a$, tzn. $|f(z)| \leqslant M$, to punkt $a$ jest pozornie osobliwy. Rzeczywiście, na mocy (3.51) dla $n > 0$

i dla dostatecznie małego $R$ mamy $|A_{-n}| \leqslant MR^n$, skąd po przejściu do granicy przy $R \to 0$ otrzymujemy $|A_{-n}| \leqslant 0$, czyli $A_{-n} = 0$.

Jeśli punkt $a$ jest biegunem, to w otoczeniu punktu $a$ mamy

$$f(z) = \sum_{-n}^{\infty} A_k (z-a)^k, \qquad A_{-n} \neq 0,$$

skąd

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

gdzie

$$\varphi(z) = A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + \ldots + A_0(z-a)^n + \ldots$$

jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $a$, przy czym $\varphi(a) = A_{-n} \neq 0$. Na odwrót, jeśli

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

gdzie funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i $\varphi(a) \neq 0$, to $a$ jest biegunem rzędu $n$ funkcji $f(z)$ (liczbę $n$ nazywamy *rzędem bieguna* $a$; bieguny rzędu 1 nazywamy *biegunami jednokrotnymi*, bieguny rzędu 2 nazywamy *biegunami dwukrotnymi*, bieguny rzędu 3 nazywamy *biegunami trzykrotnymi*).

Z tego wzoru na funkcję $f(z)$ wynika, że $f(z) \to \infty$, gdy $z \to a$. Tak więc, jeśli zmienna niezależna $z$ dąży do bieguna funkcji analitycznej, to wartość funkcji dąży do nieskończoności. Łatwo widzieć, że jeśli $a$ jest zerem $n$-krotnym funkcji $f(z)$, to $a$ jest biegunem $n$-krotnym funkcji $1/f(z)$, gdyż z równości $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ (gdzie funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i różna od zera w punkcie $a$) wynika

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}$$

(gdzie funkcja $1/\varphi(z)$ też jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i różna od zera w punkcie $a$).

*Jeśli $a$ jest punktem istotnie osobliwym, to w dowolnie małym otoczeniu punktu $a$ wartości funkcji $f(z)$ zbliżają się dowolnie blisko do każdej liczby zespolonej* (*twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa*).



Rzeczywiście, gdyby w pewnym otoczeniu punktu $a$ zachodziła nierówność

$$|f(z)-A| > \delta, \qquad \text{gdzie} \qquad \delta > 0,$$

to funkcja $1/(f(z)-A)$ byłaby ograniczona w otoczeniu punktu $a$, czyli punkt $a$ byłby punktem pozornie osobliwym funkcji $1/(f(z)-A)$. Mielibyśmy więc

$$\frac{1}{f(z)-A} = \varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu $a$, skąd dla $z$ bliskich $a$

$$f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)},$$

czyli punkt $a$ byłby albo punktem pozornie osobliwym funkcji $f(z)$ (gdy $\varphi(a) \neq 0$), albo biegunem (gdy $\varphi(a) = 0$), co przeczy założeniu.

Prawdziwe jest o wiele głębsze twierdzenie Picarda, które mówi, że w dowolnym otoczeniu punktu istotnie osobliwego funkcja analityczna nie tylko zbliża się dowolnie blisko do każdej liczby zespolonej, lecz przybiera wszystkie wartości zespolone, z wyjątkiem co najwyżej jednej.

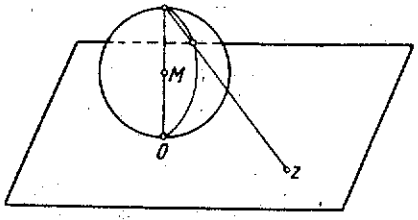
Jeśli wszystkie punkty osobliwe funkcji $f(z)$ w obszarze $D$ są biegunami, to funkcję $f(z)$ nazywamy *meromorficzną* w obszarze $D$. Jeśli funkcja $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze $D$ i $a$ jest dowolnym punktem tego obszaru, to w otoczeniu punktu $a$ mamy

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

gdzie funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i $\varphi(a) \neq 0$. Liczbę $n$ nazywamy *rzędem funkcji* $f(z)$ w punkcie $a$. Jeśli $n > 0$, to $a$ jest zerem $n$-krotnym funkcji $f(z)$; jeśli $n = 0$, to funkcja $f(z)$ nie jest równa zeru w punkcie $a$; jeśli $n = -m < 0$, to $a$ jest biegunem $m$-krotnym funkcji $f(z)$. Gdy funkcje meromorficzne mnożymy (dzielimy), to ich rzędy w każdym punkcie dodajemy (odejmujemy).

**Punkt w nieskończoności**

Jeśli do płaszczyzny zmiennej zespolonej dodamy jeden element niewłaściwy zwany *punktem w nieskończoności* $\infty$, to otrzymamy *płaszczyznę domkniętą* zmiennej zespolonej. Płaszczyzna domknięta zmiennej zespolonej jest w pewnym sensie podobna do powierzchni kuli. Można to dostrzec za pomocą rzutu stereograficznego. Rozważmy kulę (rys. 43) styczną do płaszczyzny zmiennej zespolonej w punkcie $O$ (biegun południowy). Punkt $z$ połączmy z biegunem północnym odcinkiem linii prostej i oznaczmy przez $M$ punkt przecięcia tego odcinka z powierzchnią kuli. Jeśli każdej liczbie zespolonej $z$ przyporządkujemy tak określony punkt $M$, to zostanie w ten sposób ustalona odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między wszystkimi liczbami zespolonymi i punktami $M$ powierzchni kuli (oprócz bieguna północnego). Dołączając element niewłaściwy $\infty$ i przyporządkowując go biegunowi północnemu otrzymamy odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między punktami płaszczyzny zespolonej domkniętej i punktami powierzchni kuli.




Rys. 43

*Otoczeniem* punktu w nieskończoności nazwiemy część płaszczyzny leżącą na zewnątrz dowolnego koła o środku $O$ (im większy jest promień tego koła, tym „mniejsze" jest otoczenie punktu $\infty$).

Przypuśćmy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu w nieskończoności. Wówczas na zewnątrz pewnego koła o środku $O$ rozwija się ona w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^k. \tag{3.53}$$



A priori są możliwe i wykluczają się wzajemnie trzy następujące przypadki:

1) w rozwinięciu (3.53) nie ma wyrazów o wykładnikach dodatnich,

2) w rozwinięciu (3.53) występuje tylko skończona ilość wyrazów o wykładnikach dodatnich,

3) w rozwinięciu (3.53) występuje nieskończenie wiele wyrazów o wykładnikach dodatnich.

W przypadku 1) punkt $\infty$ nazywamy *punktem pozornie osobliwym*, w przypadku 2) punkt $\infty$ nazywamy *biegunem*, w przypadku 3) punkt $\infty$ nazywamy *punktem istotnie osobliwym*. Podstawienie $z = 1/\zeta$ sprowadza badanie funkcji $f(z)$ w otoczeniu punktu $\infty$ do badania funkcji $f(1/\zeta)$ w otoczeniu punktu 0. Wobec tego jeśli $\infty$ jest punktem pozornie osobliwym, to wartości funkcji $f(z)$ dążą do granicy skończonej, gdy $z \to \infty$ (po odpowiednim określeniu wartości funkcji w punkcie $\infty$ funkcję można uważać za analityczną w punkcie $\infty$); jeśli $\infty$ jest biegunem, to wartości funkcji $f(z)$ dążą do $\infty$, gdy $z \to \infty$; jeśli $\infty$ jest punktem istotnie osobliwym, to wartości funkcji $f(z)$ w dowolnym otoczeniu punktu $\infty$ zbliżają się dowolnie blisko do każdej liczby zespolonej.

Jeśli w otoczeniu punktu $\infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-n} A_k z^k = \frac{A_{-n}}{z^n} + \frac{A_{-n-1}}{z^{n+1}} + \ldots,$$

gdzie $A_{-n} \neq 0$, to punkt $\infty$ nazywamy *zerem n-krotnym* funkcji $f(z)$.

## § 17. RESIDUA

Niech $a$ będzie punktem osobliwym odosobnionym skończonym funkcji analitycznej $f(z)$; w otoczeniu punktu $a$ funkcja rozwija się w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n.$$

Współczynnik przy potędze $-1$ w tym rozwinięciu, tzn. liczbę $A_{-1}$ nazywamy *residuum* funkcji $f(z)$ w punkcie osobliwym $a$. Residuum funkcji $f(z)$ w punkcie $a$ można oznaczyć symbolem $\operatorname{res}_a f(z)$.

Ze wzoru (3.50) dla $n = -1$ otrzymujemy

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint}_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{3.54}$$

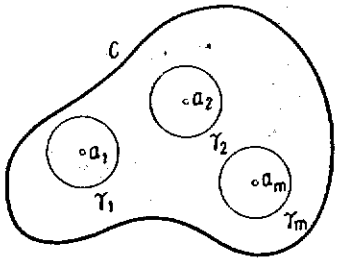
gdzie $\gamma$ jest dostatecznie małym okręgiem o środku $a$.

**Twierdzenie podstawowe o residuach**

*Jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz krzywej zamkniętej $C$ i na tej krzywej z wyjątkiem skończonej liczby punktów leżących wewnątrz $C$, to całka*

$$\underbrace{\oint}_{C} f(z)\,dz$$

*jest równa iloczynowi $2\pi i$ przez sumę residuów funkcji $f(z)$ w punktach osobliwych leżących wewnątrz $C$.*




Rys. 44

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (rys. 44) będą punktami osobliwymi funkcji $f(z)$ leżącymi wewnątrz $C$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będą residuami funkcji $f(z)$ w tych punktach. Wokół tych punktów zatoczmy okręgi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ leżące wewnątrz $C$ i nie przecinające się. Stosując twierdzenie Cauchy'ego dla krzywej złożonej i korzystając ze wzoru (3.54) będziemy mieli

$$\underbrace{\oint}_{C} f(z)\,dz = \underbrace{\oint}_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \underbrace{\oint}_{\gamma_m} f(z)\,dz = 2\pi i(a_1 + \ldots + a_m),$$

co należało wykazać.

Tak więc do obliczenia całki wzdłuż krzywej zamkniętej $C$ wystarczy znać residua funkcji w punktach osobliwych leżących wewnątrz $C$.



**Obliczenie residuum funkcji w biegunie wielokrotnym**

Przypuśćmy, że

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

gdzie funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ są analityczne w otoczeniu punktu $a$ i punkt $a$ jest zerem jednokrotnym funkcji $\psi(z)$. Wówczas punkt $a$ jest biegunem jednokrotnym funkcji $f(z)$ (o ile $\varphi(a) \neq 0$). Mamy $\psi(z) = (z-a)\psi_1(z)$, gdzie funkcja $\psi_1(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i $\psi_1(a) = 0$. Funkcja $\varphi(z)/\psi_1(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$ i

$$\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)} + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \ldots$$

Wobec tego w otoczeniu punktu $a$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)} = \frac{\dfrac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}}{z-a} + B_1 + B_2(z-a) + \ldots,$$

skąd

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}. \tag{3.55'}$$

Ale

$$\psi'(z) = \psi_1(z) + (z-a)\psi_1'(z), \qquad \psi'(a) = \psi_1(a),$$

wobec czego

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.55}$$

PRZYKŁADY:

$$\operatorname{res}_\pi \operatorname{ctg} z = \operatorname{res}_\pi \frac{\cos z}{\sin z} = \left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=\pi} = 1,$$

$$\operatorname{res}_a \frac{e^z}{z^2-a^2} = \left[\frac{e^z}{2z}\right]_{z=a} = \frac{e^a}{2a}.$$

**Residua pochodnej logarytmicznej funkcji meromorficznej**

Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną. Wówczas pochodna logarytmiczna $f'(z)/f(z)$ również będzie funkcją meromorficzną, przy czym zera i bieguny funkcji $f(z)$ będą biegunami jednokrotnymi funkcji $f'(z)/f(z)$. Rzeczywiście, w otoczeniu punktu $a$ mamy

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

gdzie funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna i $\varphi(a) \neq 0$,

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Wobec tego (na mocy analityczności w otoczeniu punktu $a$ składnika drugiego po prawej stronie)

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$

Tak więc residuum pochodnej logarytmicznej jest równe rzędowi funkcji danej w tym punkcie. Z tej uwagi i z podstawowego twierdzenia o residuach wynika (po uwzględnieniu, że w zerze $n$-krotnym rząd funkcji jest równy $n$, w biegunie $m$-krotnym rząd funkcji jest równy $-m$) następujące



TWIERDZENIE O RESIDUACH LOGARYTMICZNYCH. *Jeśli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną wewnątrz krzywej zamkniętej i na tej krzywej, przy czym na krzywej nie ma zer ani biegunów, to całka*

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

*jest równa iloczynowi $2\pi i$ przez różnicę liczby zer funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$* (każde zero liczone jest tyle razy, ile wynosi jego krotność) *i liczby biegunów funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$* (każdy biegun liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Tak więc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P, \tag{3.56}$$

gdzie $N$ jest sumą krotności zer funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$, $P$ jest sumą krotności biegunów funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$.

Wzór (3.56) łatwo można uogólnić. Zauważmy najpierw, że jeżeli $a$ jest biegunem jednokrotnym funkcji $\psi(z)$ i funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$, to

$$\operatorname{res}_a[\varphi(z)\psi(z)] = \varphi(a)\operatorname{res}_a \psi(z). \tag{3.55''}$$

Rzeczywiście, w otoczeniu punktu $a$ mamy

$$\psi(z) = \frac{\psi_1(z)}{z-a},$$

gdzie $\psi_1(z)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $a$,

$$\varphi(z)\psi(z) = \frac{\varphi(z)\psi_1(z)}{z-a}, \qquad \operatorname{res}_a \psi(z) = \psi_1(a),$$

$$\operatorname{res}_a[\varphi(z)\psi(z)] = \varphi(a)\psi_1(a).$$

Wobec tego równość (3.55'') jest prawdziwa.

Przypuśćmy, że funkcja $f(z)$ spełnia wymienione poprzednio warunki i że $\varphi(z)$ jest dowolną funkcją analityczną w obszarze ograniczonym krzywą $C$ i na tej krzywej. Ponieważ każdy punkt osobliwy pochodnej logarytmicznej funkcji meromorficznej jest biegunem jednokrotnym, więc dla każdego punktu $a$ będącego zerem albo biegunem funkcji $f(z)$ mamy

$$\operatorname{res}_a\left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=\varphi(a)\operatorname{res}_a\frac{f'(z)}{f(z)}=n\varphi(a),$$

gdzie $n$ jest rzędem funkcji $f(z)$ w punkcie $a$. Stąd i z podstawowego twierdzenia o residuach wynika, że jeśli $a_k$ są zerami $m_k$-krotnymi funkcji $f(z)$ leżącymi wewnątrz $C$ i $b_l$ są biegunami $n_l$-krotnymi funkcji $f(z)$ leżącymi wewnątrz $C$, to

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_k m_k\varphi(a_k)-\sum_l n_l\varphi(b_l). \tag{3.56'}$$

Dla $\varphi(z)\equiv 1$ wzór ten sprowadza się do wzoru (3.56).

**Obliczenie residuum funkcji w biegunie jednokrotnym**

Niech $a$ będzie biegunem $n$-krotnym funkcji $f(z)$. Wówczas w otoczeniu punktu $a$ mamy

$$f(z)=\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-a}+\varphi(z)$$

(gdzie funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna w otoczeniu punktu $a$). Stąd

$$(z-a)^n f(z)=A_{-n}+\ldots+A_{-1}(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\varphi(z)$$

w otoczeniu punktu $a$. Różniczkując tę równość $(n-1)$-krotnie otrzymamy

$$[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}=(n-1)!A_{-1}+[(z-a)^n\varphi(z)]^{(n-1)}.$$

Ale punkt $a$ jest zerem ostatniego składnika, gdyż punkt $a$ jest zerem krotności co najmniej $n$ funkcji $(z-a)^n\varphi(z)$ (przy każdym różniczkowaniu krotność zera zmniejsza się o jeden). Wobec tego przechodząc do granicy, gdy $z\to a$, otrzymujemy

$$\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}=(n-1)!A_{-1},$$

skąd

$$A_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

A zatem jeśli $a$ jest biegunem $n$-krotnym funkcji $f(z)$, to

$$\operatorname{res}_a f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}. \tag{3.57}$$

Dla $n=1$ otrzymujemy z tego wzoru wyprowadzony poprzednio wzór (3.55) na obliczanie residuum w biegunie jednokrotnym.

PRZYKŁAD.

$$\operatorname{res}_i\frac{1}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n}\right]^{(n-1)}= \tag{3.57'}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]^{(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\ldots(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!(2i)^{2n-1}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}.$$

**Zastosowanie residuów do obliczania całek niewłaściwych**

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ ma nad osią rzeczywistą co najwyżej skończoną ilość punktów osobliwych $a, b, \ldots, k$ (rys. 45) i nie ma punktów osobliwych na osi rzeczywistej. Dla dostatecznie dużego $R$ punkty $a, b, \ldots, k$ będą leżały wewnątrz górnego półkola o promieniu $R$ i środku 0. Oznaczając brzeg tego półkola przez $C$ będziemy mieli

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i[\operatorname{res}_a f(z)+\operatorname{res}_b f(z)+\ldots+\operatorname{res}_k f(z)], \tag{3.58'}$$

ale

$$\oint_C f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}f(x)\,dx+\int_{\gamma_R}f(z)\,dz,$$

gdzie $\gamma_R$ jest górnym półokręgiem o promieniu $R$ i środku 0. Jeśli dla $z \to \infty$ (w górnej półpłaszczyźnie) $f(z)$ dąży do zera szybciej niż $1/z$, tzn. jeśli $f(z) = a(z)/z$, gdzie $a(z) \to 0$ przy $z \to \infty$ (w górnej półpłaszczyźnie), to

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Rzeczywiście, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie $A > 0$, że dla $|z| > A$, $y \geqslant 0$ $(z = x+iy)$ mamy $|a(z)| < \varepsilon$. Wówczas

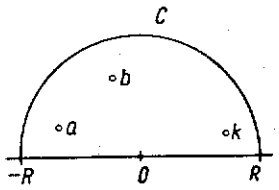
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\gamma_R} \frac{a(z)}{z}\,dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R}\pi R = \pi\varepsilon,$$

co należało wykazać.

Wobec tego przechodząc w równości (3.58′) do granicy, gdy $R \to +\infty$, otrzymamy (rozumiejąc $\int_{-\infty}^{\infty}$ jako $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i[\operatorname{res}_a f(z) + \ldots + \operatorname{res}_k f(z)]. \tag{3.58}$$

A zatem, jeśli funkcja $f(z)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie $y \geqslant 0$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów osobliwych leżących nad osią rzeczywistą i jeśli dla $z \to \infty$ (w górnej półpłaszczyźnie) $f(z)$ dąży do zera szybciej niż $1/z$, to całka



Rys. 45

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

istnieje i jest równa iloczynowi $2\pi i$ przez sumę residuów funkcji $f(z)$ w punktach osobliwych leżących nad osią rzeczywistą.

W szczególności wzór (3.58) można stosować wtedy, gdy funkcja $f(z)$ ma w punkcie $\infty$ zero krotności $\geqslant 2$, nie ma punktów osobliwych na osi rzeczywistej i ma co najwyżej skończoną ilość punktów osobliwych nad osią rzeczywistą.



Na przykład wzór (3.58) można stosować wtedy, gdy $f(z)$ jest ułamkiem wymiernym, którego mianownik nie ma pierwiastków rzeczywistych i w którym stopień mianownika jest większy od stopnia licznika o więcej niż o jedność.

Przykład 1. Obliczyć

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}.$$

Mianownik ma pierwiastki $\pm 1 \pm i$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4} &= 2\pi i\left(\operatorname{res}_{1+i}\frac{1}{z^4+4} + \operatorname{res}_{-1+i}\frac{1}{z^4+4}\right) = \\ &= 2\pi i\left[\left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=1+i} + \left(\frac{1}{4z^3}\right)_{z=-1+i}\right] = \\ &= 2\pi i\left[\left(\frac{z}{4z^4}\right)_{z=1+i} + \left(\frac{z}{4z^4}\right)_{z=-1+i}\right] = \\ &= 2\pi i\left(\frac{1+i}{-16} + \frac{-1+i}{-16}\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Przykład 2. Obliczyć

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Mianownik ma pierwiastki $\pm i$ ($n$-krotne). Uwzględniając wzór (3.57′) otrzymujemy

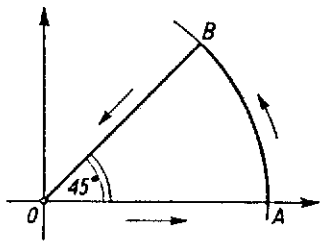
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{(z^2+1)^n} = \pi \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} = \\ &= \pi \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)}.\end{aligned}$$

**Zastosowanie twierdzenia podstawowego Cauchy'ego do obliczania całek niewłaściwych**

Nie będziemy zajmowali się rozważaniami ogólnymi i dla przykładu obliczymy całki Fresnela

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\,dx, \qquad \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx.$$

Rozważmy funkcję całkowitą $e^{iz^2}$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego całka tej funkcji po każdej krzywej zamkniętej prostowalnej jest równa zeru; w szczególności jest równa zeru całka po obwodzie wycinka kołowego $AOB$ (rys. 46). Wobec tego



Rys. 46

$$\int_{OABO} e^{iz^2}dz = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = 0.$$

Mamy

$$\int_{OA} e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{ix^2}dx.$$

Równanie parametryczne zespolone łuku $AB$ ma postać $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{4}\pi$; wobec tego

$$\int_{AB} e^{iz^2}dz = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\varphi}} iRe^{i\varphi}\,d\varphi = iR\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi + i(R^2\cos 2\varphi + \varphi)}\,d\varphi,$$

skąd (po uwzględnieniu nierówności $\sin\theta > 2\theta/\pi$ zachodzącej dla $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$)

$$\left|\int_{AB} e^{iz^2}dz\right| \leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi}\,d\varphi < R\int_0^{\infty} e^{-4R^2\varphi/\pi}\,d\varphi = \frac{\pi}{4R}$$

i wobec tego

$$\int_{AB} e^{iz^2}dz \to 0, \quad \text{gdy} \quad R \to \infty.$$

Równanie parametryczne zespolone odcinka $OB$ ma postać

$$z = \varrho e^{\pi i/4}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant R;$$

wobec tego

$$\int_{OB} e^{iz^2}dz = e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-\varrho^2}d\varrho,$$



skąd (opierając się na wzorze (4.10) z rozdziału IV)

$$\int_{OB} e^{iz^2}dz \to e^{\pi i/4}\int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}d\varrho = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4}, \quad \text{gdy} \quad R \to \infty.$$

Z przytoczonych rozważań wynika, że jeśli w równości

$$\int_{OABO} e^{iz^2}dz = 0$$

przejdziemy do granicy, gdy $R \to \infty$, to otrzymamy równość

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi i/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i), \tag{3.59}$$

przy czym udowodniliśmy równocześnie zbieżność tej całki niewłaściwej.

Przechodząc do wartości sprzężonych znajdziemy stąd

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\pi i/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i). \tag{3.59'}$$

Wypisując oddzielnie części rzeczywiste i części urojone we wzorze (3.59) otrzymamy

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{3.60}$$

skąd (na mocy parzystości funkcji podcałkowych)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.60'}$$

## § 18. ZASADA ARGUMENTU

Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną wewnątrz krzywej zwykłej zamkniętej $C$ i na tej krzywej, nie mającą zer ani biegunów na krzywej $C$. Ponieważ

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \ln f(z),$$

więc

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = [\ln f(z)]_C,$$

gdzie symbol występujący po stronie prawej oznacza przyrost funkcji $\ln f(z)$, gdy punkt $z$ obiega krzywą $C$ w kierunku dodatnim. Ale

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z).$$

Ponieważ funkcja $\ln f(z)$ jest ciągła i jednoznaczna, więc po opisaniu krzywej $C$ wraca do swej wartości początkowej. A zatem

$$[\ln f(z)]_C = i[\arg f(z)]_C,$$

czyli

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_C.$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o residuach logarytmicznych

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

gdzie $N$ jest ilością zer i $P$ jest ilością biegunów funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$ (z uwzględnieniem ich krotności). W ten sposób otrzymujemy regułę zwaną *zasadą argumentu*:

*Jeśli funkcja $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze ograniczonym krzywą zwykłą zamkniętą $C$ oraz na tej krzywej i jeśli funkcja $f(z)$ nie ma zer ani biegunów na krzywej $C$, to różnica ilości zer i ilości biegunów* (z uwzględnieniem ich krotności) *funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$ jest równa pełnej liczbie obrotów wokół zera, jakie wykona wektor odpowiadający punktowi $f(z)$, gdy punkt $z$ opisuje krzywą $C$ w kierunku dodatnim*, tzn.

$$N - P = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_C. \tag{3.61}$$



Za pomocą zasady argumentu można udowodnić następujące

TWIERDZENIE ROUCHÉGO. *Jeśli funkcje $f(z)$ i $\varphi(z)$ są analityczne w obszarze ograniczonym krzywą zamkniętą $C$ oraz na tej krzywej i jeśli we wszystkich punktach krzywej $C$ zachodzi nierówność $|f(z)| > |\varphi(z)|$, to funkcje $f(z)$ i $f(z)+\varphi(z)$ mają wewnątrz $C$ jednakową ilość zer* (każde zero liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Dowód. Z założeń twierdzenia wynika, że funkcje $f(z)$ i $f(z)+\varphi(z)$ nie mają zer na krzywej $C$, gdyż dla każdego $z$ leżącego na $C$ mamy

$$|f(z)| > |\varphi(z)| \geqslant 0, \qquad |f(z)+\varphi(z)| \geqslant |f(z)| - |\varphi(z)| > 0.$$

Niech $N$ będzie ilością zer funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$ i niech $\tilde{N}$ będzie ilością zer funkcji $f(z)+\varphi(z)$ leżących wewnątrz $C$. Na mocy zasady argumentu mamy

$$\tilde{N} = \frac{1}{2\pi}\{\arg[f(z)+\varphi(z)]\}_C = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left[f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]\right\}_C =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_C + \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]_C = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_C = N.$$

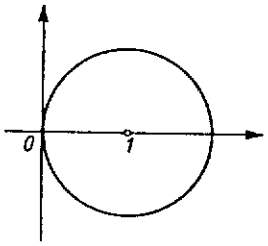
Uwzględniliśmy tu, że

$$\left[\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right]_C = 0;$$

jeśli bowiem punkt $z$ opisuje krzywą $C$, to punkt $1+\varphi(z)/f(z)$ zakreśla drogę leżącą wewnątrz koła o promieniu 1 i środku 1 (rys. 47), gdyż na krzywej $C$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1.$$

W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.



Rys. 47

Zajmiemy się teraz pewnymi wnioskami z twierdzenia Rouchégo.

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze ograniczonym krzywą zamkniętą $C$ oraz na tej krzywej, nie mającą zer na krzywej $C$. *Jeśli funkcje* $f_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *są analityczne w obszarze ograniczonym krzywą* $C$ *oraz na tej krzywej i jeśli* $f_n(z) \to f(z)$ *jednostajnie na* $C$, *to dla dostatecznie dużych* $n$ *ilość zer* (z uwzględnieniem ich krotności) *funkcji* $f_n(z)$ *leżących wewnątrz* $C$ *jest równa ilości zer* (z uwzględnieniem ich krotności) *funkcji* $f(z)$ *leżących wewnątrz* $C$ (*twierdzenie Hurwitza*).

Rzeczywiście, ponieważ funkcja $f(z)$ nie ma zer na krzywej $C$, więc

$$m = \min_C |f(z)| > 0;$$

wobec tego istnieje taki wskaźnik $N$, że dla $n > N$ i dla $z$ leżących na $C$ zachodzi nierówność

$$|f_n(z) - f(z)| < m,$$

ale w takim razie w sumie

$$f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$$

moduł drugiego składnika jest mniejszy od modułu składnika pierwszego dla wszystkich $z$ leżących na $C$; a zatem na mocy twierdzenia Rouchégo ilość zer funkcji $f_n(z)$ leżących wewnątrz $C$ jest równa ilości zer funkcji $f(z)$ leżących wewnątrz $C$, co należało wykazać.

Niech $a$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Te wartości $z$, dla których wartość funkcji $f(z)$ jest równa liczbie $a$, nazwiemy *a-punktami* funkcji $f(z)$. Inaczej mówiąc $a$-punkty funkcji $f(z)$ są to zera funkcji $f(z) - a$. Ponieważ zera funkcji analitycznej nie równej tożsamościowo zeru są odosobnione, więc $a$-punkty funkcji analitycznej nie równej tożsamościowo $a$ są również odosobnione. Mówimy ponadto, że $a$-punkt funkcji $f(z)$ ma *krotność* $n$, gdy jest on zerem $n$-krotnym funkcji $f(z) - a$.

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną nie równą tożsamościowo stałej i niech $z_0$ będzie $a$-punktem $n$-krotnym tej funkcji. Ponieważ $a$-punkty są odosobnione, więc na okręgu $\gamma$ o środku $z_0$ i o dostatecznie małym promieniu, a także w jego wnętrzu, nie będzie żadnych innych $a$-punktów. Wówczas

$$m = \min_\gamma |f(z) - a| > 0.$$



Jeśli $|b - a| < m$, to wewnątrz okręgu $\gamma$ będzie znajdować się dokładnie $n$ (z uwzględnieniem krotności) $b$-punktów funkcji $f(z)$. Rzeczywiście,

$$f(z) - b = [f(z) - a] + (a - b)$$

i na okręgu $\gamma$ zachodzi nierówność

$$|a - b| < |f(z) - a|;$$

wobec tego na mocy twierdzenia Rouchégo ilość zer (z uwzględnieniem ich krotności) funkcji $f(z) - b$ leżących wewnątrz $\gamma$ jest równa analogicznej ilości zer funkcji $f(z) - a$, a zatem jest równa $n$ (wewnątrz $\gamma$ funkcja $f(z) - a$ ma tylko jedno zero $z_0$ i jego krotność wynosi $n$). Zauważmy jeszcze, że gdy promień $\varrho$ okręgu $\gamma$ będzie dostatecznie mały (taki, że $f'(z) \neq 0$ dla $0 < |z - z_0| < \varrho$), to funkcja $f(z)$ będzie przybierać wartość $b$ w dokładnie $n$ punktach wewnątrz $\gamma$ i wszystkie te $b$-punkty będą jednokrotne.

Funkcja analityczna $f(z)$ nie równa tożsamościowo stałej przekształca zbiory otwarte w otwarte. Rzeczywiście, jeśli $f(z_0) = w_0$, to na mocy poprzednich rozważań równanie $f(z) = w_1$ ma rozwiązanie wewnątrz dowolnie małego koła o środku $z_0$, o ile tylko $w_1$ jest dostatecznie bliskie $w_0$.

Z ostatniej uwagi wynika, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną w pewnym obszarze, nie równą tożsamościowo stałej, to dowolnie blisko każdego punktu $z_0$ tego obszaru można znaleźć punkt $z_1$ taki, że $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. Stąd wynika *zasada maksimum*: *jeśli funkcja* $f(z)$ *jest ciągła w obszarze domkniętym ograniczonym i analityczna wewnątrz tego obszaru, to moduł* $f(z)$ *osiąga swą wartość największą na brzegu obszaru.*

Z zasady maksimum wynika bezpośrednio twierdzenie: *jeśli ciąg funkcji* $f_n(z)$ *ciągłych w obszarze domkniętym ograniczonym i analitycznych wewnątrz tego obszaru jest zbieżny jednostajnie na brzegu obszaru, to jest również zbieżny jednostajnie w całym obszarze.*