Funkcje zespolone.

Liczby zespolone

Zadanie 1. Znaleźć moduł i argument liczby:

(1) $z = 4 + 3i$;
(2) $z = -7 - i$;
(3) $z = 4 - 3i$;
(4) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;
(5) $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$;
(6) $z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$.

Zadanie 2. Zapisać w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

(1) -2;
(2) $2i$;
(3) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
(4) $1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$;
(5) $-i$;
(6) $-1 - i\sqrt{3}$;
(7) $5 + 3i$.

Zadanie 3. Obliczyć:

(1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;
(2) $(2 - 2i)^7$;
(3) $(\sqrt{3} - 3i)^6$;
(4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$.

Zadanie 4. Rozwiązać równania:

(1) $z^4 = -1$;
(2) $z^2 = i$;
(3) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$;
(4) $z^5 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

Zadanie 5. Znaleźć zbiór D punktów z na płaszczyźnie taki że dla $z \in D$ mamy:

(1) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$;
(2) $|z^2 - 1| \geq a^2,\ a > 0$;
(3) $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$;
(4) $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$;
(5) $|z| + \operatorname{Re} z < 1$;
(6) $\operatorname{Im} \overline{z}^2 < 1$;
(7) $\operatorname{Im} z^2 = 2$;
(8) $z^2 + \overline{z}^2 = 1$;
(9) $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$.

Funkcje elementarne

Zadanie 6. Znaleźć części rzeczywistą i zespoloną funkcji:

(1) $w = e^{-z}$;
(2) $w = e^{z^2}$;
(3) $w = \sin z$;
(4) $w = \operatorname{ch}(z - i)$;
(5) $w = \operatorname{tg} z$.

Zadanie 7. Znaleźć moduł i argument funkcji $w(z)$ we wskazanych punktach:

(1) $w = \cos z,\ z_1 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2,\ z_2 = \pi + i\ln 2$;
(2) $w = \operatorname{sh} z,\ z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$;
(3) $w = ze^z,\ z_0 = \pi i$.

Zadanie 8. Znaleźć:

(1) i^i;
(2) $i^{\frac{1}{i}}$;
(3) 1^i;
(4) $(-1)^{\sqrt{2}}$;
(5) $(1 - i)^{3-3i}$.

Zadanie 9. Rozwiązać równania:

(1) $\sin z = 3$;
(2) $e^z + i = 0$;
(3) $4\cos z + 5 = 0$;
(4) $\operatorname{ch} z = i$.