Funkcje zespolone.

Pochodna

Zadanie 1. Korzystając z równań Cauchy'ego–Riemanna, sprawdzić, że funkcje są analityczne.

(1) $w = e^z$;
(2) $w = z\overline{z}$;
(3) $w = \overline{z}$;
(4) $w = z^2\overline{z}$;
(5) $w = ze^z$;
(6) $w = \overline{z}\mathrm{Re}\ z$.

Zadanie 2. Znaleźć funkcje analitycną, jeżeli znana jest część rzeczywista $u(x, y)$ (część urojona $v(x, y)$) i wartość $f(z_0)$.

(1) $u(x, y) = 2e^x \cos y, \quad f(0) = 2$;
(2) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}$;
(3) $v(x, y) = \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x}, \quad (x > 0),\ f(1) = 0$;
(4) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$;
(5) $u = 2 \sin x \mathrm{ch}\, y - x$;

Zadanie 3. Udowodnić, że podane funkcji są harmoniczne

(1) $u = x^2 + 2x - y^2$;
(2) $u = e^x \cos y$;
(3) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$;
(4) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Zadanie 4. Króre z podanych funkcji są sprzęzone:

(1) $u = 3(x^2 - y^2), \quad v = 3x^2y - y^3$;
(2) $u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;
(3) $u = x, \quad v = -y$;
(4) $u = e^x \cos x + 1, \quad v = 1 + e^x \sin y$.

Całka

Zadanie 5. Obliczyć całki

(1) $\int_C 1+i-2\overline{z}\, dz$, gdzie C jest linią między $z_1 = 0$ i $z_2 = 1 + i$. a) C jest odcinkem; b) C jest łamaną $z_1z_3z_2$, $z_3 = 1$; c) C jest parabolą $y = x^2$.
(2) $\int_C (z^2 + z\overline{z})\, dz$ C jest łukiem $|z| = 1$ $(0 \leq \arg\ z \leq \pi)$;
(3) $\int_C e^{\overline{z}}\, dz$, C jest odcinkem z_1z_2, $z_1 = 0$, $z_2 = \pi - i\pi$;
(4) $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\, dz$;
(5) $\int_0^i z \cos z\, dz$;
(6) $\int_C z\overline{z}\, dz$, C : $|z| = 1$. Orientacja dodatnia;
(7) $\int_C \mathrm{Re}\ z\, dz$, C : a) $z = (2 + i)t(0 \leq t \leq 1)$; b) łamana $z_0z_1z_2$, $z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = 2 + i$.