Funkcje zespolone.

Wzór całkowy Cauchy'ego (1) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$

Zadanie 1. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego (1) obliczyć całkę

(1) $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$, jeżeli $a)$ C : $|z-2| = 1$ $b)$ $C : |z-2| = 3$; $|z-2| = 5$

(2) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}\,dz$

(3) $\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}\,dz$

(4) $\int_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}\,dz$

(5) $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$

Wzór całkowy Cauchy'ego (2) $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego (2) obliczyć całkę

(1) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$

(2) $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}$

(3) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$

(4) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\,dz$;

(5) $\int_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)}\,dz$

Zadanie 3. Rozwinąć w szereg Taylora $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$. Znaleźć promień zbieżności.

(1) $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$, $z_0 = 0$;

(2) $f(z) = \frac{1}{3-2z}$, $z_0 = 3$;

(3) $f(z) = \frac{1}{3z+1}$, $z_0 = -2$;

(4) $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$, $z_0 = 0$.

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg Laurenta $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$.

(1) $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$, $1 < |z-1| < 2$;

(2) $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$;

(3) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$, $z_0 = 0$;

(4) $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $a)$ $2 < |z| < 3$, $b)3 < z < +\infty$;

(5) $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$.