Funkcje zespolone

Zera funkcji

Zadanie 1. Znaleźć zera. Wyznaczyć ich rzędy.

(1) $f(z) = 1 - e^z$;
(2) $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$;
(3) $f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z$;
(4) $f(z) = z^4 + 4z^2$;
(5) $f(z) = z^2 \sin z$;
(6) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$.

Punkty osobliwe odosobnione

Zadanie 2. Wyznaczyć punkty osobliwe i określić rodzaj osobliwości.

(1) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$;
(2) $f(z) = \frac{1}{z^3}$;
(3) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$;
(4) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$;
(5) $f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}$;
(6) $f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}$;
(7) $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}$;
(8) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$.

Residua

Zadanie 3. Znaleźć residua w punktach osobliwych.

(1) $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$;
(2) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)}$;
(3) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$;
(4) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}$;
(5) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$;
(6) $f(z) = \frac{e^z}{z^3 (z-1)}$.

Zadanie 4. Obliczyć całki.

(1) $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\, dz$;
(2) $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz$;
(3) $\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 + 1}\, dz$;
(4) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3 (z+1)}\, dz$;
(5) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z}\, dz$;
(6) $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z}\, dz$;

Zadanie 5. Obliczyć całki typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx, \quad R(x) := \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

(1) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad (a > 0)$;
(2) $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{(x^4 + 1)}\, dx$;
(3) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad (a > 0,\ b > 0)$;
(4) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}, \quad (a > 0)$.

Zadanie 6. Obliczyć całki typu $\int_0^\infty R(x) \cos \lambda x\, dx, \quad \int_0^\infty R(x) \sin \lambda x\, dx$.

(1) $\int_0^\infty \frac{x \sin ax\, dx}{x^2 + b^2}, \quad (a > 0,\ b > 0)$;
(2) $\int_0^\infty \frac{x \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10}$;
(3) $\int_0^\infty \frac{x \sin x\, dx}{x^2 + 4x + 20}$;
(4) $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{x^2 + 9}$.

Zadanie 7. Obliczyć całki typu $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$.

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}, \quad (a > b > 0)$;
(2) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad (0 < p < 1)$;
(3) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad (p > 1)$;
(4) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad (a > 1)$.

Zadanie 8* Obliczyć całki.

(1) $\int_0^\infty \frac{\sin ax dx}{x (x^2 + b^2)^2}, \quad (a > 0,\ b > 0)$.;
(2) $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$;
(3) $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$;
(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{1 + e^x}, \quad (0 < a < 1)$.