Pochodne cząstkowe funkcji. Różniczka funkcji.

Zadanie 1. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

(1) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
(2) $u = \ln(x + y^2)$
(3) $u = xy + \frac{x}{y}$
(4) $u = \arctan \frac{y}{x}$
(5) $u = \frac{x}{y^2}$
(6) $u = x^y$

Zadanie 2. Napisać rózniczki pierwszego i drgugiego rzędu podanych funkcji.

(1) $u = x^m y^n$
(2) $u = \frac{x}{y}$
(3) $u = e^{xy}$
(4) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

Zadanie 3. Wykorzystując rózniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

(1) $(1.02)^4 \cdot (0.97)^2$
(2) $\sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3}$
(3) $(1.04)^{3.01}$
(4) $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$

Zadanie 4. Napisać równania plaszczyzn stycznych we wskazanych punktach.

(1) $z = x^2 + y^2,\ M_0(1, 2, 5)$
(2) $z = \frac{\arctan x}{1+y^2},\ M_0(1, 0, \frac{\pi}{4})$
(3) $z = x^y,\ M_0(2, 4, 16)$
(4) $z = x^2 + 2y^2 + 3xy,\ M_0(1, 2, 15)$

Pochodne cząstkowe funkcji złożonych. Pochodna kierunkowa funkcji.

Zadanie 5. Obliczyć podane pochodne cząstkowe dla wskazanych funkji:

(1) $z'(x), \quad z = F(x, y(x))$
(2) $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \quad z = F(x(v), y(u))$
(3) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z = (x^2 + y^2)e^{\frac{(x^2+y^2)}{xy}}$
(4) $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \quad z = F(t(u, v))$

Zadanie 6. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach.

(1) $f = x^2 - y^2, \quad M_0(1, 1)$
(2) $f = x^3 + y^3, \quad M_0(-1, 1)$
(3) $f = \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2}), \quad M_0(3, 4)$
(4) $f = \frac{xy^2}{z^3}, \quad M_0(16, -3, 2)$

Zadanie 7. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(1) $f = x^2 - y^2, \quad M_0(1, 1), \quad \bar{l} = (\sqrt{3}, 1)$
(2) $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad M_0(1, 2), \quad \bar{l} = (1, -\sqrt{3})$
(3) $f = e^{x+y}, \quad M_0(1, -1), \quad \bar{l} = (1, 1)$
(4) $f = (x^3 + y^3 + z^3)^{1/3}, \quad M(3, 4, 5), \quad \bar{l} = (-1, 1, 1)$

Zadanie 8. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0, 0)$. Sprawdzić, czy jest ona różniczkowalna w tym punkcie.

Zadanie 9. Pokazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ciągla w otoczeniu $(0, 0)$ i ma ograniczone pochodne cząstkowe. Czy jest ona różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$?

Zadanie 10. Pokazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dla} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{dla} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $(0, 0)$ nieciągle pochodne cząstkowe. Czy jest ona różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$?