Całki podwójne.

Zadanie 1. Obliczyć dane całki podwójne po wskazanych prostokątach

(1) $\iint_R y^3 e^{x^2}\,dxdy$, gdzie $R=[0,2]\times[-1,1]$;
(2) $\iint_R \frac{x}{y^2}\,dxdy$, gdzie $R=[1,2]\times[4,6]$;
(3) $\iint_R \sin(x-y)\,dxdy$, gdzie $R=[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{3}]$;
(4) $\iint_R \left(\frac{2y^2}{x^3}+\frac{3x}{y}\right)dxdy$, gdzie $R=[1,3]\times[1,e]$;
(5) $\iint_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $R=[0,2]\times[0,1]$;
(6) $\iint_R x\sin(xy)\,dxdy$, gdzie $R=[0,2]\times[-1,1]$.

Zadanie 2. Całkę podwójną $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o podanych równaniach:

(1) $y=x^2,\ y=1$;
(2) $xy=6,\ x+y=7$;
(3) $x=y^2,\ x=y^2/2+1$;
(4) $x^2+y=2,\ y^3=x^2$;
(5) $x^2+y^2=4, y=2x-x^2,\ x=0,\ (x,y\geq 0)$.
(6) $x^2-4x+y^2+6y-51=0$.

Zadanie 3. W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

(1) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$;
(2) $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$;
(3) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$;
(4) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$;
(5) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$;
(6) $\int_1^3 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$;
(7) $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

Zadanie 4. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D: x^2+y^2\leq a^2$;
(2) $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D:\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2$;
(3) $\iint_D \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^2}$, gdzie $D: x^2+y^2\leq x,\ x^2+y^2\leq y$;
(4) $\iint_D (x+y)\,dxdy$, gdzie $D: x^2+y^2\leq x+y$.

Zadanie 5. Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

(1) $y=x^2-x,\ y=x$;
(2) $y^2=4x,\ x+y=3,\ y=0\ (y\geq 0)$;
(3) $x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2-4y=0$;
(4) $x+y=4,\ x+y=8,\ x-3y=0,\ x-3y=5$;
(5) $y=e^x, y=\ln x, x+y=1, x=2$;
(6) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2\geq a^2$;
(7) $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

Zadanie 6. Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

(1) $x^2+y^2=1,\ x+y+z=3,\ z=0$;
(2) $x=0,\ y=1-|x|,\ z=0, z=10-5x-2y$;
(3) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$;
(4) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$;
(5) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$;
(6) $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2$;