Równania różniczkowe drugiego rzędu.

Równania sprowadzalne do równań rzędu pierwszego.

Zadanie 1. Wyznaczyć rozwiązania podanych równań:

(1) $y''(1+x^2)=1$;
(2) $xy''-y'=e^x x^2$;
(3) $xy''=y'(\ln y'-\ln x)$;
(4) $y''+2y'=(y')^2e^x$;
(5) $yy''-(y')^2=y'$;
(6) $(1+y^2)y''=2y(y')^2$.

Równania liniowe jednorodne drugiego rzędu.

Zadanie 2. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań, jeżeli znane jest jedno z ich rozwiązań:

(1) $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0,\ y_1(x)=e^x$;
(2) $y''-\frac{y'}{x}=0,\ y_1(x)=1$;
(3) $xy''-(x+1)y'+y=0,\ y_1(x)=x+1$;
(4) $xy''-y'+4x^3y=0,\ y_1(x)=\sin(x^2)$.

Zadanie 3. Rozwiązać podane równania różniczkowe:

(1) $y''-2y=0$;
(2) $y''-y'+y=0$;
(3) $y''+y'-2y=0$;
(4) $y''-4y'+4y=0$;
(5) $y''+9y=0$;
(6) $y''+y'=0$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

(1) $y''+y'-10y=0,\ y(1)=5,\ y'(1)=2$;
(2) $y''+y'+2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2$;
(3) $2y''-y'+3y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1$;
(4) $9y''+6y'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Zadanie 5. Niech $y_1(x), y_2(x)$ będą rozwiązaniami równania $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha,\beta]$. Oznaczmy

$$W(x) := W[y_1(x),y_2(x)] = y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x).$$

(1) Poprzez bezpośredni rachunek sprawdź, że $W'+p(x)W=0$.
(2) Na podstawie poprzedniego punktu wywnioskuj, że dla każdych $x,x_0\in[\alpha,\beta]$ jest prawdziwa równość $W[y_1(x),y_2(x)]=W[y_1(x_0),y_2(x_0)]\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)\,ds\right)$.
(3) Udowodnij, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(x),y_2(x)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha,\beta]$.

Zadanie 6. Załóżmy, że wyznacznik Wrońskiego rozwiązań równania $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ jest stały (niezależny od x) i różny od 0. Udowodnij, że $p(x)\equiv 0$.

Zadanie 7. Sprawdź, że $W[e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x]=\beta e^{2\alpha x}$.

Zadanie 8. Równanie postaci $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0,\ \alpha,\beta$ — stałe, nazywa się *równaiem Eulera.* Udowodnij, że funkcja $y(x)=x^r$ jest rozwiązaniem tego równania o ile $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$.

(1) Znajdź rozwiązanie ogólne równania $x^2y''+5xy'-5y=0$.
(2) Znajdź rozwiązanie zagadnienia $x^2y''-xy'-2y=0,\ y(1)=0,\ y'(1)=1$ na przedziale $0<x<\infty$.