**Uniwersytet Wrocławski** 29.08.2019

**Symulacje i algorytmiczne zastosowania łańcuchów Markowa**

**Sylabus**

Paweł Lorek

# Opis kursu i cele

Łańcuch Markowa jest ciągiem zdarzeń losowych, w którym następny stan zależy tylko od stanu obecnego. Może wydawać się to zaskakujące, że te łańcuchy (nazwane po A. Markowie) szeroko występują w naszym codziennym życiu, klasyczne przykłady zawierają: tasowanie kart, zmiany cen akcji na giełdzie, modelowanie ruchów w grze Monopoly, algorytm PageRank używany przez firmę Google (ich "klucz do sukcesu"), RC4 (schemat kryptograficzny), model Isinga (ważny przykład ze statystyki fizycznej), kody korekcji błędów (algorytm Viterbiego, używany w prawie wszystkich telefonach komórkowych, wynaleziony przez A. Viterbiego - współzałożyciela firmy Qualcomm), i wiele innych.

Kurs poświęcony jest dyskretnym łańcuchom Markowa ze skończoną przestrzenią stanów. Zaczniemy od podstaw (rozkład stacjonarny, symulacje oparte na macierzy przejścia, odwracalność), potem przedstawimy metody Monte Carlo Markov Chains (MCMC, klasa algorytmów zapewniająca jedną z obecnie najpopularniejszych metod uzyskania próbki z zadanego rozkładu na dużych przestrzeniach); zagadnienie prędkości zbieżności łańcucha ("ile razy powinniśmy tasować talię kart?") - przestawimy metody couplingowe, strong stationary times, metody dualne, nierówności (Cheegera i Poincarégo) do ograniczania drugiej (co do wartości bezwzględnej) wartości własnej macierzy przejść; algorytm Coupling From The Past (poprawa standardowych metod MCMC, pozwala na uzyskanie nieobciążonej próbki z zadanego rozkładu, np. model Isinga); szacowanie prawdopodobieństwa wygrania w zagadnieniach typu "ruina gracza" (przedstawimy "first-step analysis" oraz dualność Siegmunda); algorytm "simulated annealing" (szeroko stosowany zrandomizowany algorytm dla różnych problemów optymalizacyjnych); podstawy ukrytych modeli markowa (HMM, popularny algorytm uczenia maszynowego, np. do rozpoznawania mowy i korekcji błędów); zrandomizowane schematy aproksymacyjne działające w czasie wielomianowym (algorytm MCMC do aproksymacji „odpowiedzi" na problem NP-trudny, np. liczba możliwych kolorowań grafu).

# Techniki nauki

Wykład, ćwiczenia, omawianie rozwiązań studentów.

# Wymagania

## Przedmioty

- Algebra
- Rachunek prawdopodobieństwa

# Treści programowe

- Łańcuchy Markowa ze skończoną przestrzenią stanów.
- Symulacja łańcuchów Markowa na komputerze. Generatory liczb pseudolosowych (i ich niedoskonałości).
- Rozkład stacjonarny
- Błądzenia losowe po grafach; Łańcuchy odwracalne.
- Prędkość zbieżności do stacjonarności: metody couplingowe, szacowanie drugiej (co do wartości bezwzględnej) wartości własnej macierzy przejść (nierówności Poincarégo oraz Cheegera), Strong Stationary Times.
- Monte Carlo Markov Chains. Algorytm Metropolis-Hastings. Sampler Gibbsa. Model Isinga; Hard-core model; Aspekty prędkości zbieżności.
- Approximate counting (przybliżone zliczanie obiektów kombinatorycznych); $q$-kolorowanie grafu;
- Symulacja doskonała: algorytm Proppa Wilsona (Coupling From The Past).
- Strong Stationary Times oraz łańcuchy Strong Stationary Dual, dualność w sensie Siegmunda. Rozwiązywanie zagadnień typu "ruina gracza" używając dualności.
- Ukryte modele Markowa (HMM) z dyskretnymi i ciągłymi obserwacjami, algorytm Bauma-Welcha, algorytm Viterbiego. Zastosowania do korekcji błędów i klasyfikacji szeregów czasowych.

# Zakładane efekty kształcenia

## Wiedza

- Student rozumie pojęcie łańcuchów Markowa i spacerów losowych
- Student rozumie budowę modeli próbkowania, w tym próbnika Gibbsa i algorytm Metropolis-Hasting

- Student wie jak uzyskać nieobciążoną próbkę z niektórych rozkładów za pomocą algorytmu Coupling From The Past
- Student zna konstrukcję ukrytych modeli Markowa oraz algorytmy w nich stosowane
- Student rozumie zagadnienie prędkości zbieżności, zna kilka technik jej badania

### Umiejętności

- Student potrafi analizować zachowanie spaceru losowego
- Student potrafi ocenić działanie niektórych algorytmów zradnomizowanych
- Student wie jak skutecznie (i w przybliżeniu) próbkować z niektórych rozkładów na dużej przestrzeni stanów (umie zaprojektować i zaimplementować algorytm Metroplolis-Hasting oraz próbnik Gibbss)
- Student potrafi używać i implementować algorytmy związane z ukrytymi modelami Markowa

## Metody weryfikacji zakładanych efektów kształcenia

egzamin pisemny, dwa kolokwia, prezentacja rozwiązań zadań/problemów

## Warunki i forma zaliczenia

- *Ćwiczenia*: Odbędą się 2 punktowane kolokwia, punkty będą także przyznawane za przedstawianie rozwiązań zadań na ćwiczeniach. Aby zdać, należy uzyskać minimalną liczbę punktów.
- *Egzamin pisemny*: Na egzaminie będzie kilka zadań do rozwiązania. Aby zdać, należy uzyskać minimalną liczbę punktów.

## Nakład pracy studenta

- Zajęcia z nauczycielem:
  - wykłady - 30 godzin
  - ćwiczenia - 30 godzin
  - egzamin pisemny - 3 godziny
- Praca własna studenta:
  - przygotowywanie się do zajęć - 35 godzin
  - czytanie dodatkowego materiału - 22 godziny
  - przygotowywanie się do kolokwiów i egzaminu - 30 godzin

# Literatura

**Podstawowa książka:**

[1] Olle Häggström. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University Press, 2002.

**Dodatkowa książka:**

[2] Levin, Peres, Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*, American Mathematical Society, 2017.