

Projekt nr 2

Projekt dotyczy implementacji filtra Kalmana.

- Ustalmy liczby całkowite $d \geq 1, p \geq 1, 0 < m \leq d$. Rozważamy następujący model:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k,$$

gdzie $\mathbf{X}_k$ jest rozmiaru $d \times 1$, $\mathbf{F}_k$ jest macierzą $d \times d$, $\mathbf{u}_k$ jest rozmiaru $p \times 1$, $\mathbf{B}$ jest rozmiaru $d \times p$, a $\mathbf{w}_j$ jest (rozmiaru $d \times 1$) jest zmienną losową o rozkładzie wielowymiarowym normalnym $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ o macierzy kowariancji $\mathbf{Q}_k$ rozmiaru $d \times d$.

Co więcej $\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$. Obserwujemy

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{v}_k,$$

gdzie $\mathbf{H}_k$ jest rozmiaru $m \times d$, a $\mathbf{v}_k$ (o rozmiarze $m \times 1$) ma rozkład $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$.

- Przyjmijmy, iż stanami jest dwuwymiarowa pozycja (x_k, y_k) oraz prędkości $\dot{x}_k, \dot{y}_k$, czyli $d = 4$ oraz

$$\mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{pmatrix}$$

- Załóżmy, iż

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(\Delta t)^2 \\ 0 \\ -\Delta t \end{pmatrix}, \mathbf{u} = (g), \text{ gdzie } g = 9.8$$

Innymi słowy:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + (\Delta t)\dot{x}_{k-1}, & \dot{x}_k &= \dot{x}_{k-1} \\ y_k &= y_{k-1} + (\Delta t)\dot{y}_{k-1} - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 g, & \dot{y}_k &= \dot{y}_{k-1} - (\Delta t)g \end{aligned}$$

Model ten odpowiada spadającemu obiektowi (współrzędna x zmienia się z jednakową prędkością, a wysokość y porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym).

- Do powyższego dochodzi błąd $\mathbf{w}_k$
- Obserwujemy tylko x_k, y_k (z dodatkowym błędem $\mathbf{v}_k$), zatem

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ustal T (np. około 1000), $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$, rozsądne $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}$ i wysymuluj trajektorie $\mathbf{X}_k$ oraz $\mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, T$.
- (A) Zastosuj filtr Kalmana do wyznaczania $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ *online*, tj. krok po kroku podczas poznawania $\mathbf{Y}_k$. Na jednym rysunku przedstaw: “prawdziwe” punkty z $\mathbf{X}_k$, “prawdziwe” $\mathbf{Y}_k$ oraz wyestymowane $\hat{\mathbf{X}}_k$.
- (B) Zastosuj filtr Raucha-Tunga-Striebela do *wygładzania*, tj. do wyliczenia $\hat{\mathbf{X}}_{k|T}$. Wyniki dołącz do rysunku.

W (A) i (B) rozważ różne stany początkowe (np. znany dokładny, wylosowany ze znanych $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0 \dots$)

Policz też błędy predykcji (np. sumę/średnią odległość euklidesową wyestymowanych punktów od “prawdziwych”)

- (C) Załóżmy teraz, że znamy $\mathbf{F}, \mathbf{H}$ (są takie jak powyżej) oraz, że nie znamy $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ (ale wiemy, że są stałe w czasie). Znamy także całą trajektorię $\mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, T$. Użyj EM do estymacji $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$, zastosuj filtr Kalmana, porównaj wyniki do przypadku ze znanymi $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$.

- Projekt można wykonać **w grupach do 3 osób**.
- Należy oddać **kod** napisany w języku **python** (z “własnoręcznie” zaimplementowanym filtrem Kalmana) oraz **raport** w formacie **.pdf** opisujący przeprowadzone symulacje i uzyskane wyniki.
- **Termin oddania:** TBA