

**Egzamin z matematyki ubezpieczeniowej (MUMIO), semestr  
zimowy 03/04, zestaw 2**

Data: **30.01.2004**. Egzaminator: Ryszard Szekli

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ**

1. Liczba szkód  $N$  ma rozkład Poissona z parametrem 1, indywidualne, niezależne szkody  $X_i, i \geq 1$  ( $X_0 = 0$ ) mają rozkład równomierny na zbiorze  $\{0, 2, 4, 6\}$ . Jeśli  $S = X_0 + X_1 + \dots + X_N$ , to

- (a)  $P(S = 13) > 1/20$
- (b)  $Var S = 5$
- (c)  $P(S = 0) = e^{-3/4}$
- (d)  $ES > EX_1$

Rozwiązanie:

- (a) **NIE** Szkody mogą przyjmować tylko wartości ze zbioru  $\{0, 2, 4, 6\}$  - są to liczby parzyste i nie mogą dać w sumie 13, zatem  $P(S = 13) = 0 < 1/20$
- (b) **NIE**  $Var S = Var(\sum_{i=1}^N X_i) = EN \cdot Var X + Var N \cdot (EX)^2$   
 $EN = 1, Var N = 1, EX = \frac{1}{4}(2 + 4 + 6) = 3, Var X = ((0 - 3)^2 + (3 - 1)^2 + (3 - 4)^2 + (3 - 6)^2) \frac{1}{4} = 5$   
 Stąd  $Var S = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 9 = 14$

(c) **TAK**

PIERWSZY SPOSÓB:

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa:

$$P_X(t) = \frac{1}{4}(1 + t^2 + t^4 + t^6), P_N(t) = e^{t-1}$$

$$P_S(0) = P_N(P_X(0)) = e^{(\frac{1}{4}-1)} = e^{-\frac{3}{4}}$$

DRUGI SPOSÓB:

$$\begin{aligned} P(S = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S = 0 | N = k) P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot e^{-1} \cdot \frac{1}{k!} \\ &= e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{k!} = e^{-1} e^{\frac{1}{4}} = e^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

(d) **NIE**  $ES = EN \cdot EX_1 = 1 \cdot EX_1 = EX_1$

2. Szkody mają rozkłady dwumianowe  $P(X_i = k) = \binom{10}{k}$

$(\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{10-k}, k = 0, \dots, 10$ . Niech

$S = X_1 + \dots + X_{80}$ . Składka pobierana od każdej szkody

jest postaci  $(1 + \theta)EX_i$ , dla pewnej stałej  $\theta > 0$ .

Jak dobrać wartość tej stałej, aby szansa, że

zebrana składka od wszystkich 80 szkód pokryje szkodę

wynosiła 0.95

(a) ok. 3%

(b) ok 4%

(c) nie istnieje taki narzut przy danym prawdopodobieństwie

(d) ok. 10%

Rozwiązanie:

$$n = 10, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}, EX = n \cdot p = \frac{10}{4}, Var X = n \cdot p \cdot q = \frac{10}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

$$ES = EX \cdot 80 = 200, Var S = Var X \cdot 80 = 150$$

Czyli mamy :

$$\frac{\theta \cdot 200}{\sqrt{150}} = 1.645, \theta = \frac{1.645 \cdot \sqrt{150}}{200} \approx 10\%$$

(a) **NIE**

(b) **NIE**

(c) **NIE**

(d) **TAK**

3. Szkoda X ma rozkład o gęstości wykładniczej

$f(x) = e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)$  Funkcja użyteczności

$u(x) = -e^{-x} + 1$ . Wtedy

(a)  $Eu(X)=1/12$

(b)  $Varu(X) = 1/12$

$$(c) P(u(X) \leq 1/2) = 1/2$$

$$(d) E(u(X)) < 1 - e^{-EX}$$

Rozwiązanie:

$X \sim f(x) = e^{-x}, x > 0$ , zauważmy, że  $u$  jest dystrybucją tego rozkładu  $u(X) = F(X)$

$$P(F(X) \leq x) = P(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

czyli  $Y = u(X)$  ma rozkład jednostajny na  $(0, 1)$

$$(a) \text{ **NIE** } Eu(X) = EY = 1/2$$

$$(b) \text{ **TAK** } Varu(X) = VarY = 1/12$$

$$(c) \text{ **TAK** } P(u(X) \leq 1/2) = P(Y \leq 1/2) = 1/2$$

$$(d) \text{ **TAK** z nierówności Jensena mamy } E(u(X)) < u(EX) = 1 - e^{-EX}$$

4. Dwie niezależne sumaryczne szkody  $S_1, S_2$  mają złożone rozkłady Poissona.  $S_1 \sim CPoisson(2, F)$ ,  $S_2 \sim CPoisson(2, G)$ , gdzie  $F$  jest rozkładem równomiernym na  $\{0, 2, 4\}$  oraz  $G$  jest rozkładem równomiernym na  $\{1, 3, 5\}$ . Wtedy

$$(a) P(S_1 + S_2 = 0) = e^{-4}$$

$$(b) E((S_1 + S_2)^2) = 410/3$$

$$(c) Var(S_1 + S_2) = 81/3$$

$$(d) S_1 + S_2 \text{ ma rozkład } CPoisson(2, H), \text{ gdzie } H \text{ jest rozkładem równomiernym na } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Rozwiązanie:

Policzmy funkcje tworzące momenty

$$S_1 = X_1 + \dots + X_N, X \sim F, N \sim Poiss(2)$$

$$S_1 = Y_1 + \dots + Y_N, Y \sim G, N \sim Poiss(2)$$

$$P_N(t) = e^{2(t-1)}$$

$$P_{X_1}(t) = \frac{1}{3}(1 + t^2 + t^4)$$

$$P_{Y_1}(t) = \frac{1}{3}(t + t^3 + t^5)$$

$$P_{S_1}(t) = P_N(P_{X_1}(t)) = e^{2(\frac{1}{3}(1+t^2+t^4)-1)}$$

$$\begin{aligned}
 P_{S_1}(t) &= P_N(P_{Y_1}(t)) = e^{2(\frac{1}{3}(t+t^3+t^5)-1)} \\
 P_S(t) &= P_{S_1+S_2}(t) = P_{S_1}(t)P_{S_2}(t) = e^{2(\frac{1}{3}(1+t^2+t^4)-1)}e^{2(\frac{1}{3}(t+t^3+t^5)-1)} = \\
 &= \dots = e^{\frac{2}{3}(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5-6)}
 \end{aligned}$$

(a) **NIE**  $P(S_1 + S_2 = 0) = P_{S_1+S_2}(0) = e^{-\frac{10}{3}}$

(intuicyjnie: prawdopodobieństwo, że w ogóle nie wystąpią szkody, tj. że będzie ich 0 w  $S_1$  oraz 0 w  $S_2$  wynosi właśnie  $e^{-2}e^{-2} = e^{-4}$ , ale  $S_1 + S_2 = 0$  może też być w przypadku, gdy  $S_1$  ma niezerową liczbę szkód, ale wszystkie te szkody wynoszą 0 (bo  $X$  ma rozkład równomierny na  $\{0, 2, 4\}$  - czyli może wynieść 0) - zatem  $P(S_1 + S_2 = 0)$  powinno być większa niż  $e^{-4}$  )

(b) **TAK**

PIERWSZY SPOSÓB:

$$EX = \frac{1}{3}(0 + 2 + 4) = 2, \text{Var} X = \frac{2^2+2^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$EY = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3, \text{Var} Y = \frac{2^2+2^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$EN = \text{Var} N = 2, E(S_1 + S_2) = EN \cdot EX + EN \cdot EY = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$\text{Var} S_1 = \text{Var}(\sum_{i=1}^N X_i) = \text{Var} X \cdot EN + \text{Var} N \cdot (EX)^2 = \frac{8}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 = \frac{40}{3}$$

$$\text{Var} S_2 = \text{Var}(\sum_{i=1}^N Y_i) = \text{Var} X \cdot EN + \text{Var} N \cdot (EX)^2 = \frac{8}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 9 = \frac{70}{3}$$

$$\text{czyli } \text{Var}(S_1 + S_2) = \frac{40}{3} + \frac{70}{3} = \frac{110}{3}$$

$$E(S_1 + S_2)^2 - (E(S_1 + S_2))^2 = \text{Var} S,$$

$$\text{stąd } E(S_1 + S_2)^2 = \text{Var} S + (E(S_1 + S_2))^2 = \frac{110}{3} + \frac{300}{3} = \frac{410}{3}$$

DRUGI SPOSÓB:

Policzmy funkcje tworzącą momenty zmiennej  $S = S_1 + S_2$

$$M_{S_1+S_2}(t) = M_S(t) = P_S(e^t) = e^{\frac{2}{3}(1+e^t+e^{2t}+e^{3t}+e^{4t}+e^{5t}-6)}$$

pierwszy i drugi moment to pochodne (pierwsza i druga) w 0:

$$M'_S(t) = \frac{2}{3}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t})e^{\frac{2}{3}(1+e^t+e^{2t}+e^{3t}+e^{4t}+e^{5t}-6)}$$

$$ES = M'_S(0) = \frac{2}{3}(1 + 2 + 3 + 4 + 5)e^0 = 10$$

$$M''_S(t) = \frac{2}{3}\left((e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t} + 16e^{4t} + 25e^{5t})e^{\frac{2}{3}(1+e^t+e^{2t}+e^{3t}+e^{4t}+e^{5t}-6)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t})^2 e^{\frac{2}{3}(1+e^t+e^{2t}+e^{3t}+e^{4t}+e^{5t}-6)} \\
ES^2 &= E(S_1+S_2)^2 = M_S''(0) = \frac{2}{3} \left( (1+4+9+16+25) + \frac{2}{3}(1+2+3+4+5)^2 \right) \\
&= \frac{2}{3}(55 + \frac{2}{3} \cdot 15^2) = \frac{2}{3} \left( \frac{165}{3} + \frac{2}{3} \cdot 225 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{165 + 450}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{615}{3} = \frac{2}{3} \cdot 205 = \frac{410}{3}
\end{aligned}$$

(c) **NIE**  $Var(S_1+S_2) = E(S_1+S_2)^2 - (E(S_1+S_2))^2 = \frac{410}{3} - 10^2 = \frac{110}{3}$

(d) **NIE**  $S_1 + S_2$  ma rozkład  $CPoission(4, H)$ , gdzie  $H$  ma rozkład równomierny na  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  Policzmy funkcje tworzącą prawdopodobieństwa takiej zmiennej losowej:

$$\begin{aligned}
P_N(t) &= e^{4(t-1)}, P_{X_1}(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 \\
P_S(t) &= P_N(P_{X_1}(t)) = e^{4(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5) - 1} = e^{\frac{2}{3}(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5-6)}, \\
&\text{a to jest funkcja tworząca prawdopodobieństwa uzyskana w podpunkcie a) , czyli dla } S_1 + S_2
\end{aligned}$$

5. Szkoda  $X$  ma rozkład geometryczny z  $p = 1/3$  na

$\{0, 1, 2, \dots\}$ . Niech  $I_d(X)$  oznacza kontrakt stop-loss.

Wtedy

- (a)  $E(I_2(X)) = 8/9$
- (b)  $Var(I_1(X)) = 44/9$
- (c)  $Var(I_0(X)) = 6$
- (d)  $E(I_2(X)) = E(I_1(X)) + P(X > 1)$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
EI_k(X) &= EI_{k-1}(X) - P(X > k), p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3} \\
E(I_k^2(X)) &= E(I_{k-1}^2(X)) - 2EX + P(X > k-1)
\end{aligned}$$

(a) **TAK**

$$\begin{aligned}
EI_2(X) &= EI_1(X) - P(X > 1) = EI_0(X) - P(X > 0) - P(X > 1) \\
&= EX - (1 - P(X > 0)) - (1 - P(X = 0) - P(X = 1)) \\
&= 2 - (1 - p) - (1 - p - pq) = 2 - \frac{2}{3} - (1 - \frac{3}{9} - \frac{2}{9}) = 2 - \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

(b) **TAK**

$$\begin{aligned}
&\text{pierwszy moment: } EI_1(X) = EI_0(X) - P(X > 0) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
&\text{drugi moment: } E(I_1^2(X)) = E(I_0^2(X)) - 2EX + P(X > 0) = \frac{q}{p^2} + 4 - 4 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{Stąd: } Var(I_1(X)) = E(I_1^2(X)) - (EI_1(X))^2 = 6 + \frac{6}{9} - \frac{16}{9} = 44/9$$

(c) **TAK**  $Var I_0(X) = E(I_0^2(X)) - (EI_0(X))^2 = E(X^2) - (EX)^2 = Var X = \frac{q}{p^2} = 6$

(d) **NIE**, jest:  $EI_k(X) = EI_{k-1}(X) - P(X > k)$

6. W dyskretnym modelu rezerwy, kapitał początkowy wynosi 1, a szkody mają rozkład  $P(X_i = 0) = 0.7$ ,  $P(X_i = 2) = 0.3$ . Współczynnik Cramera  $\tilde{R}$  spełnia wtedy

(a) równy jest  $\ln(\frac{7}{3})$

(b)  $e^{-\tilde{R}}$  jest ostro mniejsze od prawdopodobieństwa ruiny w tym modelu

(c) w tym przypadku współczynnik nie istnieje

(d) prawdopodobieństwo ruiny równe jest w tym modelu  $e^{-\tilde{R}}$

Rozwiązanie:

$\tilde{R}$  wyliczymy z równości  $M_X(r) = e^r : 0.7e^0 + 0.3e^{2r} = e^r$

podstawmy  $z = e^r$ ,  $0.7 + 0.3z^2 = z$ ,  $0.3z^2 - z + 0.7 = 0$

$\Delta = 1 - 4(0.3 \cdot 0.7) = 0.16$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = \frac{14}{6}$

$\tilde{R} = \ln \frac{14}{6} = \ln \frac{7}{3}$

(a) **TAK**

(b) **NIE** (jest:  $\psi(u) \leq e^{-\tilde{R}}$ )

(c) **NIE**

(d) **NIE** w twierdzeniu jest:  $\psi(u) = e^{-R \cdot u} \cdot const$ , gdzie

$$const = \frac{1}{E(e^{-R \cdot u(T)} | T < \infty)}$$

$T$  - moment ruiny, wtedy  $u(T) < 0$ , więc  $-R \cdot u(T) > 0$  czyli  $e^{-R \cdot u(T)} > 1$ , więc średnia takiej zmiennej losowej będzie większa od 1, a co za tym idzie  $\psi(u) < e^{-\tilde{R}}$

7. Szkoda  $X$  i szkoda  $Y$  przyjmują wartości między 0 i 10 posiadając łączną gęstość  
 $f(x, y) = 0.002xI_{(0,10) \times (0,10)}(x, y)$ . Wtedy

- (a)  $E(XY)=100/3$
- (b)  $E(X|Y=5)=6$
- (c)  $E(\frac{1}{XY} | Y > 1) = \ln(10^{1/45})$
- (d)  $E(X + Y) > 11.5$

Rozwiązanie:  $f(x, y) = 0.002xI_{(0,10) \times (0,10)}(x, y)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x, y)dy = \int 0.002xI_{(0,10) \times (0,10)}(x, y)dy = \int_0^{10} 0.002xI_{(0,10)}(x)dy \\ &= 0.002xI_{(0,10)}(x) \cdot 10 = 0.02xI_{(0,10)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int f(x, y)dx = \int 0.002xI_{(0,10) \times (0,10)}(x, y)dx = \int_0^{10} 0.002xI_{(0,10)}(y)dx \\ &= 0.002I_{(0,10)}(y) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{1}{10}I_{(0,10)}(y) \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $X$  i  $Y$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, bo  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$EX = 0.02 \int_0^{10} x^2 dx = 0.02 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{10} = 0.02 \cdot \frac{1000}{3} = \frac{20}{3}$$

$$EY = \dots = 5$$

- (a) **TAK**  $EXY = EX \cdot EY$ , (bo niezależne)  $= \frac{20}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$
- (b) **NIE**  $E(X|Y = 5) = EX = \frac{20}{3}$  (co można też wyliczyć bezpośrednio:  $f_{X|Y=5}(x) = \frac{f_{XY}(x,5)}{f_Y(5)} = \frac{0.002xI_{(0,10)}(x)}{\frac{1}{10}} = f_X(x)$ )
- (c) **TAK**  $E(\psi(X, Y)|Y \in B) = \frac{E(\psi(X, Y) \cdot I_{Y \in B})}{P(Y \in B)}$   
tutaj:  $E(\frac{1}{XY}|Y > 1) = \frac{E(\frac{1}{XY} \cdot I_{Y > 1})}{P(Y > 1)} = \frac{\int_1^{10} \int_0^{10} \frac{1}{xy} 0.002xI_{(0,10) \times (0,10)}(x, y)dy}{\int_1^{10} f_Y(y)dy}$   
 $= \frac{\int_1^{10} 10 \frac{1}{y} dy}{\int_1^{10} \frac{1}{10} dy} = \frac{10}{9} \cdot 0.02 \cdot \ln \Big|_1^{10} = \frac{2}{90} \ln(10) = \frac{1}{45} \ln(10) = \ln(10^{1/45})$
- (d) **TAK**  $E(X + Y) = EX + EY = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3} > 11.5$