Zad 1, z EGZAMINU AKTUAR. z 11.10.2003

N spełnia rekurencję:

$$\frac{P(N=k)}{P(N=k-1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{k}\right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Wiedząc, iż $\sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) = 1$ oblicz $P(N=0)$.

Rozwiązanie:
Próba 1) (nieudana)
$\left(P_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(N=k), P_N(0) = P(N=0), P'_N(0) = P(N=1), P_N(1) = 1, P'_N(1) = EN\right)$

$$P(N=k) = \frac{2}{3}P(N=k-1) + 2 \cdot \frac{1}{k}P(N=k-1) \qquad | \cdot s^k, \quad \sum$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s^k P(N=k) = \frac{2}{3} \cdot s \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} P(N=k-1) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(N=k-1)$$

$$P_N(s) - P_N(0) = \frac{2}{3}sP_N(s) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(N=k-1) \qquad |'$$

$$P'_N(s) = \frac{2}{3}P_N(s) + \frac{2}{3}sP'_N(s) + 2P_N(s)$$

$$P'_N(s)\left[1 - \frac{2}{3}s\right] = \frac{8}{3}P_N(s) \tag{1}$$

wstawiając $s = 0$ do (1) :

$$P(N=1) = \frac{8}{3}P(N=0)$$

(czyli to samo co mozna od razu z rekurencji napisac...)
wstawiając $s = 1$ do (1) :

$$EN[1 - \frac{2}{3}] = \frac{8}{3}$$

$$EN = 8$$

czyli nic to nie dalo...

Próba 2)
inaczej ($P(N=k) = p_k$):

$$p_k = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k}\right) p_{k-1} = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k-1}\right) p_{k-2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{k-2}\right) p_{k-3}$$

$$p_k = p_0 \prod_{m=1}^{k} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{m}\right) = p_0 \left(\frac{2}{3}\right)^k \prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{3}{m}\right)$$

I teraz mamy (pozniej wytlumaczone jest skad ta rownosc):

$$p_k = p_0 \left(\frac{2}{3}\right)^k \prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{3}{m}\right) = p_0 \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) \tag{2}$$

Stąd:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) \right) = p_0 + p_0 \cdot 80$$

a stąd

$$p_0 = \frac{1}{81}$$

czyli odp. A)

W równaniu (2) mamy

$$\prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{3}{m}\right) = \prod_{m=1}^{k} \left(\frac{m+3}{m}\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k} \cdot \Big((1+3) \cdot (2+3) \cdot (3+3) \cdot (4+3) \cdots (k+3) \Big) =$$

$$\frac{1}{k!} \cdot \prod_{m=1}^{k} (m+3) = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{m=4}^{k+3} m = \frac{1}{k!} \frac{(k+3)!}{(1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

Uwaga: Nie wiem czy jest to najłatwiejsze rozwiązanie: zrobione jest tu dużo więcej niż trzeba, gdyż w taki sposób "odzyskaliśmy" cały rozkład, tj. mamy

$$p_0 = \frac{1}{81}, \qquad p_k = \frac{1}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3),$$

a potrzebne było tylko p_0 - może więc istnieje łatwiejszy sposób.