Paweł Lorek

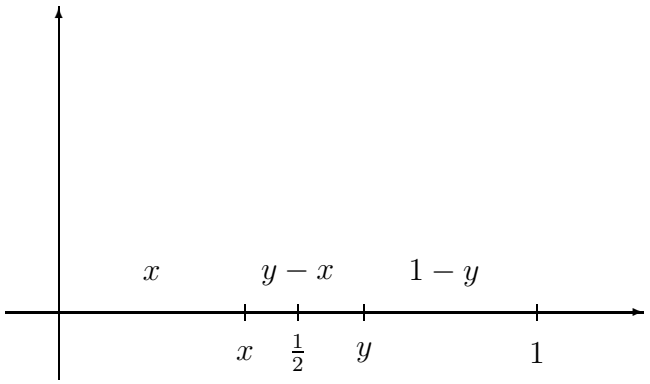
Zad: Kij o długości 1 podzielono losowo na 3 części. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych części można ułożyć trójkąt.

Rozwiązanie:

Można to zamodelować w następujący sposób: z odcinka $[0,1]$ losowo wybieramy 2 punkty x i y - to z kolei jest to samo co losowe wybranie jednego punktu (x,y) z kwadratu $[0,1]\times[0,1]$. Rozpatrzymy 2 przypadki:

a) $x<y$

Wtedy trzy powstałe odcinki mają długości: $x, y-x, 1-y$



Aby z powstałych odcinków dało się ułożyć trójkąt muszą zachodzić warunki

$$\begin{cases} (y-x)+(1-y)>x \\ x+y-x>1-y \\ x+1-y>y-x \end{cases}$$

Czyli

$$\begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ y>\frac{1}{2} \\ y<x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) $y<x$

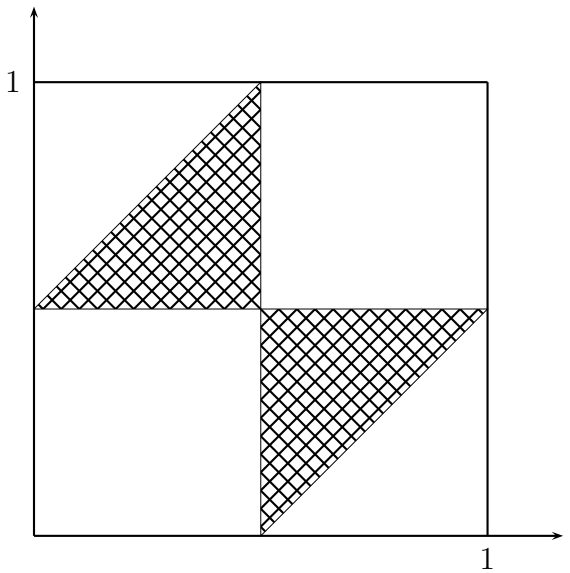
Ten przypadek wygląda tak jak powyższy - wystarczy zmienić nazwę x na y i vice versa. Zatem:

$$\begin{cases} y<\frac{1}{2} \\ x>\frac{1}{2} \\ y>x-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ostatecznie dodając warunki, które rozgraniczały przypadki, otrzymujemy, iż trójkąt da się ułożyć, gdy:

$$\begin{cases} y > x \\ x < \frac{1}{2} \\ y > \frac{1}{2} \\ y < x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \bigvee \quad \begin{cases} y < x \\ y < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \\ y > x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Co odpowiada zakratkowanemu polu w kwadracie $[0,1] \times [0,1]$:



Zatem prawdopodobieństwo, że z losowo wybranych punktów x, y z odcinka $[0,1]$ można ułożyć trójkąt równa się polu zakratkowanej figury przez pole całego kwadratu, czyli

$$P = \frac{P(\text{zakratkowanej figury})}{P(\text{pole kwadratu})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{4}$$