

1. Niech T będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Pokaż, że $ET = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k)$.
2. Dla Przykładu 1. z wykładu, tj. dla prostego symetrycznego błądzenia po 4 stanach: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

z rozkładem początkowym $\mu = (1, 0, 0, 0)$

- a) Oblicz μ^3
 - b) Oblicz μ^n ("zgadując" rozwiązanie i udowadniając indukcyjnie, że jest ono poprawne).
3. Model pogody Gothenburga. Rozważmy uproszczony model pogody: rozważamy tylko dwa stany: "deszcz" i "słońce". Po dniu deszczowym następuje dzień deszczowy z prawd. 0.75, natomiast po dniu słonecznym następuje dzień słoneczny z prawd. również 0.75. Oznaczmy przestrzeń stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, gdzie \mathbf{e}_1 oznacza dzień deszczowy, a \mathbf{e}_2 dzień słoneczny. Wtedy macierz przejść wygląda następująco:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Założmy, że $\mu = (0, 1)$.

- a) Oblicz μ^2 .
- b) Oblicz μ^n stosując diagonalizację macierzy \mathbf{P} .

4. W modelu pogody "L.A.", tj. modelu podobnym do poprzedniego zadania, ale z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix}$$

(przykład rozważany na wykładzie). Podaj wzór na μ^k dla

a) $\mu = (1, 0)$, b) $\mu = (1/2, 1/2)$, c) $\mu = (1/6, 5/6)$

Czy w którymś z przypadków można zaobserwować coś ciekawego? Co to może oznaczać?

Do czego zbiega μ^k , w każdym z przypadków, gdy $k \rightarrow \infty$?

5. Niech (X_0, X_1, \dots) będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejść \mathbf{P} i przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$, tzn. $P(X_{n+1} = \mathbf{e}_j | X_n = \mathbf{e}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Pokaż, że

$$P(X_{n+m} = \mathbf{e}_j | X_n = \mathbf{e}_i) = \mathbf{P}^m(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

6. Dla zadań 1, 2, 3 b) wskaż poprawne funkcje inicjalizujące oraz aktualizujące.
7. Dla zadania 2 wskaż min. dwie różne funkcje aktualizujące (funkcje aktualizujące nie są wyznaczone jednoznacznie).
8. Dla tasowania kart Top-To-Random narysuj graf przejść oraz podaj macierz przejść \mathbf{P} . Wylicz również \mathbf{P}^2 .
9. Dla dwóch miar probabilistycznych μ, ν na $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$ definiujemy *normę całkowitego wahanía*: $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in E} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$.

Oblicz normę całkowitego wahanía między rozkładami:

$$\mu \sim \text{Bin}(4, 1/2), \nu \sim \text{Bin}(4, 1/4)$$

10. Na przestrzeni $E = \{1, 2\}$ zdefiniujemy: $\mu^k = \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^k, \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^k \right]$, oraz

$$\nu = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right].$$

- a) Oblicz $d_{TV}(\mu^k, \nu)$.
- b) Dla jakiego (całkowitego) k norma całkowitego wahanía między μ^k i ν jest mniejsza od 0.01?
11. Rozważmy n kart. Niech μ będzie rozkładem jednostajnym na wszystkich permutacjach n kart. Natomiast niech ν będzie rozkładem jednostajnym na wszystkich takich permutacjach, w których pierwsza karta jest ustalona.
- Oblicz $d_{TV}(\mu^k, \nu)$.