Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 18.10.2013

Lista nr 3

Paweł Lorek

1. Dla modelu Ehrenfestów (Lista nr 2, zad 5) znajdź rozkład stacjonarny szukając rozkładu odwracalnego..

2. Wyobraźmy sobie samotnego króla na szachownicy, wykonującego wszystkie możliwe ruchy z jednakowym prawdopodobieństwem (tzn. wybiera losowo każdy z sąsiadujących kwadratów i tam się porusza).
   - Czy łańcuch Markowa odpowiadający powyższemu błądzeniu jest nieokresowy i/lub nieredukowalny?
   - Wskaż rozkład stacjonarny tego łańcucha.

3. Niech $(X_0, X_1, \ldots)$ będzie odwracalnym łańcuchem z przestrzenią stanów $\mathbb{E}$, macierzą przejść $\mathbf{P}$ i rozkładem odwracalnym π. Pokaż, że jeśli łańcuch zaczął z rozkładem początkowym $\mu = \pi$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i każdego $\mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n} \in \mathbb{E}$ zachodzi

$$P(X_0 = \mathbf{e}_{i_0}, X_1 = \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_n}) = P(X_0 = \mathbf{e}_{i_n}, X_1 = \mathbf{e}_{i_{n-1}}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_0}).$$

4. Pokaż, że łańcuch odpowiadający tasowaniu kart Top-To-Random (Lista nr 2, zad 9) jest nieredukowalny.

5. *Tasowanie kart* Riffle Shuffle. Tasujemy n kart w następujący sposób:
   (a) dzielimy talię kart na dwie cześci zgodnie z rozkładem $Bin(n, 1/2)$ (jedna z części może być pusta.
   Pierwszą część umieszczamy w lewej ręce (L), drugą w prawej (P).
   (b) Upuszczamy karty z rąk w kolejności (losowej) zależnej od liczby pozostałych kart: następna karta będzie upuszczona z lewej ręki L z prawdopodobieństwem $\frac{|L|}{|L|+|P|}$. Analogicznie, będzie to karta z prawej ręki z prawdopodobieństwem $\frac{|P|}{|L|+|P|}$.

   Pokaż, że łańcuch jest nieokresowy i nieredukowalny.

6. Udowodnij, że jeśli macierz prawdopodobieństw przejść łańcucha $\mathbf{P}$ jest *podwójnie stochastyczna*, tzn. zarówno wszystkie wyrazy w wierszach jak i w kolumnach, sumują się do 1, to rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jest rozkład jednostajny.

7. Zdefiniujmy:

$$d(n) = \max_{\mathbf{e}\in E} d(\mathbf{P}^n(\mathbf{e},\cdot),\pi)_{TV}, \quad \bar{d}(n) = \max_{\mathbf{e},\mathbf{e}'E} d(\mathbf{P}^n(\mathbf{e},\cdot),\mathbf{P}^n(\mathbf{e}',\cdot))_{TV}$$

Tzn., $d(n)$ to jest de facto maksimum po wszystkich rozkładach początkowych postaci $P(X_0 = \mathbf{e}) = 1$ z norm całkowitego wahania między rozkładem π, a rozkładem łańcucha w n-tym kroku.

Natomiast $\bar{d}(n)$ to maksimum po wszystkich parach stanów $\mathbf{e},\mathbf{e}'$ z norm całkowitego wahania między rozkładami w n-tym kroku łańcuchów, które zaczynały ze stanów $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ (i mają tą samą macierz przejść). Pokaż, że

- $\bar{d}(n) \le 2d(n)$
- $d(n) \le \bar{d}(n)$ (wsk. jako definicji normy całkowitego wahania użyj postaci z zad. 3. z listy 2.; rozpisz $\pi(A) = \sum_{\mathbf{e}'\in E} \pi(\mathbf{e}')P^n(\mathbf{e}',A)$)

8. Rozważmy proces urodzin i śmierci na liczbach $\{1,\ldots,M\}$ o macierzy przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \ldots & & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Coupling to jest taki proces (X_n, Y_n), w którym brzegowo X_n i Y_n są brzegowo łańcuchami Markowa o macierzy przejść $\mathbf{P}$ (łańcuchy te nie muszą być niezależne). Załóżmy, że $X_0 \le Y_0$. Skonstruuj taki coupling, w którym: jeśli $i < j$ to $X_n \le Y_n$ dla każdego $n \ge 0$

9. (*) *Błądzenie losowe po d-wymiarowej kostce.* Przestrzenią stanów są wektory 0-1 długości d, tzn. $E = \{0,1\}^d$. W każdym kroku z prawd. $1/2$ nic nie robimy, a z prawd. $1/2$ wybieramy jedną z d współrzędnych i zmieniamy ją na przeciwna (tj. np dla $(1,1,0,0,1)$ po wylosowani współrzędnej 3 przechodzimy do stanu $(1,1,1,0,1)$). Skonstruuj odpowiedni coupling, a nastepnie zbadaj prędkość zbieżności łańcucha do stacjonarności.