

(*Stała Poincarego*). Niech X o macierzy przejść \mathbf{P} będzie odwracalnym łańcuchem Markowa na grafie $G = (V, K)$, gdzie $V = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$ (wierzchołki) oraz $K = \{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) : \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) > 0\}$ (krawędzie). Dla skierowanej krawędzi $\tilde{k} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ (o wierzchołkach \mathbf{e}_i - początkowy, i \mathbf{e}_j -końcowy) zdefiniujemy $\Lambda(\tilde{k}) = \pi(\mathbf{e}_i)\mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Dla ustalonych wierzchołków \mathbf{e}_i oraz \mathbf{e}_j ustalamy deterministyczną, jednoznaczную ścieżkę od \mathbf{e}_i do \mathbf{e}_j oznaczoną $\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Dla ustalonej ścieżki jej długość definiujemy jako:

$|\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)| = \sum_{\tilde{k} \in \Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} 1$. **Stałą Poincarego** definiujemy jako:

$$\gamma_P := \max_{\tilde{k}} \left\{ \frac{1}{\Lambda(\tilde{k})} \sum_{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) : \tilde{k} \in \Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} |\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)| \pi(\mathbf{e}_i) \pi(\mathbf{e}_j) \right\}$$

(dla ustalonego \tilde{k} suma jest po wszystkich wierzchołkach $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ takich, że krawędź \tilde{k} należy do ścieżki $\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$)

Niech λ_2 oznacza drugą (co do wartości bezwzględnej) wartość własną macierzy \mathbf{P} odwracalnego łańcucha Markowa X . Przypomnijmy dwa twierdzenia z wykładu:

Twierdzenie A.

$$|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{\gamma_P}$$

Twierdzenie B.

$$d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^n, \pi) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi(\mathbf{e})}} |\lambda_2|^n$$

($\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^n$ to rozkład łańcucha w n -tym kroku, takiego, który zaczął ze stanu \mathbf{e} , tzn. $P(X_0 = \mathbf{e}) = 1$)

Dla odwracalnego, ergodycznego łańcucha $X \sim \mathbf{P}$ definiujemy **stałą Cheegera**

$$\gamma_C := \min_{A \subset \mathbb{E} : \pi(A) \leq 1/2} \frac{\sum_{\mathbf{e}_i \in A} \sum_{\mathbf{e}_j \in A^C} \pi(\mathbf{e}_i) \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{\pi(A)}$$

(A^C oznacza dopełnienie zbioru A)

Twierdzenie C.

$$|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{2} \gamma_C^2$$

Zadania:

1. Udowodnij, że $\forall x \in \mathcal{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$.
2. Niech $n(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę kroków, po której norma całkowitego wahania jest mniejsza od ε , tzn. $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$.

Pokaż, że $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n_{\gamma_P}(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$ dla $n_{\gamma_P}(\varepsilon) = \gamma_P \log \left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi(\mathbf{e})}} \right)$ (gdzie γ_P jest stałą Poincarego)

3. Pokaż, że $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n_{\gamma_C}(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$ dla $n_{\gamma_C}(\varepsilon) = \frac{2}{\gamma_C^2} \log \left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi(\mathbf{e})}} \right)$ (gdzie γ_C jest stałą Cheegera)

4. (*) Rozważmy następujące symetryczne błędzenie po okręgu: $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1-2p \end{bmatrix},$$

gdzie $p < 1/2$.

Policz (lub oszacuj) stałą γ_P .

5. (*) Policz (lub oszacuj) stałą γ_C dla błędzenia z zadania 4.
6. Dla jakiego p γ_C jest "lepsza" od γ_P dla wyników otrzymanych w zadaniach 4 i 5? Poprzez "lepsza" rozumiemy, iż daje lepsze oszacowanie w Twierdzeniu B.
7. Niech X będzie prostym błędzeniem po grafie $G = (V, K)$, gdzie $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ to zbiór wierzchołków, a K to zbiór krawędzi. Prawdopodobieństwa przejść: $\mathbf{P}(v_i, v_j) = 1/d(v_i)$ jeśli $(v_i, v_j) \in K$ ($d(v_i)$ to stopień wierzchołka v_i). Niech $\Gamma(v, v')$ oznacza jakiś wybór ścieżki z v do v' , który nie ma powtarzających się krawędzi. Zdefiniujmy:

$$d^* = \max_v d(v), \quad s^* = \max_{v, v'} |\Gamma(v, v')|, \quad \eta^* = \max_{\tilde{k} \in K} \#\{(v, v') \in V^2 : \tilde{k} \in \Gamma(v, v')\}$$

Pokaż, że $\gamma_P \leq \frac{(d^*)^2 s^* \eta^*}{|K|}$