Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 23.11.2013

Lista nr 7 (wersja poprawiona)

Paweł Lorek

1. Niech $R = (R^1, \ldots, R^q)$ będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, q\}$ - prawdopodobieństwo każdej możliwej permutacji jest jednakowe. Ustalmy $S \subset \{1, \ldots, q\}$. Zdefiniujmy
$$X = R^i, \qquad \text{gdzie} \qquad i = \min_j \{j : R^j \in S^C\}$$
(S^C to dopełnienie S). Pokaż, że $X \sim$Unif(S^C), tzn. ma rozkład jednostajny na S^C.

2. Niech X i X' będą dwoma q-pokolorowaniami grafu $G = (V, K)$. Ustalmy wierzchołek $v \in V$. Niech $S(X(v))$ będzie zbiorem kolorów występujących u sąsiada v w kolorowaniu X oraz:
$$B_2 = \{r \in \{1, \ldots, q\} : r \in S(X(v)) \cap S(X'(v))\}$$
$$B_1 = \left\{r \in \{1, \ldots, q\} : r \in \left[S(X(v)) \cap (S(X'(v)))^C\right] \cup \left[((S(X(v))^C \cap S(X'(v)))\right]\right\}$$
$$B_0 = \left\{r \in \{1, \ldots, q\} : r \in [S(X(v)) \cup S(X'(v))]^C\right\}$$
Niech $R = (R^1, \ldots, R^q)$ będzie losową permutacją jak w zadaniu 1.
$$Y = R^a, \qquad \text{gdzie} \qquad a = \min_j \{j : R^j \in S(X(v))^C\}$$
$$Z = R^b, \qquad \text{gdzie} \qquad b = \min_j \{j : R^j \in S(X'(v))^C\}$$
Pokaż, że $P(Y = Z) = \dfrac{|B_0|}{|B_0| + |B_1|}$, gdzie $|B_i|$ to moc zbioru B_i.

3. Opisz prosty i wydajny sposób generowania losowej (o rozkładzie jednostajnym) permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, d\}$.

4. Rozważmy algorytm Gibbs dla q-kolorowania grafu, wersję z losowaniem wierchołków (nie "sweep"). Niech $G = (V, K)$, $V = \{v_1, \ldots, v_M\}$. Pokaż, ze dla każdego $v \in V$, prawdopodobieństwo tego, że v zostanie wybrany podczas pierwszych M iteracji algorytmu wynosi co najmniej $1 - \dfrac{1}{e}$.

5. Rozważmy przestrzeń stanów $E = \{0, 1\}^d$. Pokaż, że dowolny rozkład π na tej przetrzeni, taki, że $\forall(\mathbf{e} \in E)\ \pi(\mathbf{e}) > 0$ można uzyskać jako rozkład stacjonarny poniższego łańcucha:

Załóżmy, że w chwili n łańcuch jest w stanie $X_n = \mathbf{e}$. Losujemy jedną współrzędną $i \in \{1, \ldots, d\}$ z rozkładem jednostajnym. Proponujemy zmienić wartość na tej współrzędnej (z 0 na 1, z 1 na 0) - tj. przejść do stanu $\mathbf{e}'$, który różni się od $\mathbf{e}$ na i-tej współrzędnej. Akceptujemy tą propozycję z prawdopodobieństwewm $\min\left(1, \dfrac{\pi(\mathbf{e}')}{\pi(\mathbf{e})}\right)$. W przeciwnym przypadku $X_{n+1} = X_n$.

6. (*) Dla $G = (V, E)$ podzbiór wierzchołków $I \subset V$ nazywsa się *zbiorem niezależnym* w G jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie są połączone krawędzią w G. Niech $\mathcal{I}(G)$ oznacza wszystkie zbiory niezależne w G. Podaj przykład łańcucha, którego rozkład stacjonarny jest rozkładem jednostajnym na $\mathcal{I}(G)$.

   Wsk: Możesz skonstruować algorytm Gibbsa, który losuje dowolny wierzchołek i rozważa jego usunięcie lub dodanie do obecnego zbioru niezależnego / stanu)