Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 29.11.2013

Lista nr 8

Paweł Lorek

1. Udowodnij następujący

   Lemat 1. *Niech* $\varepsilon \in [0,1]$*, niech* k *będzie dodatnią liczbą naturalną oraz* $a_1, \ldots, a_k$ *i* $b_i, \ldots, b_k$ *będą nieujemnymi liczbami spełniającymi*

   $$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2k}\right) \leq \frac{a_j}{b_j} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2k}\right), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

   Wtedy

   $$1 - \varepsilon \leq \frac{a}{b} \leq 1 + \varepsilon,$$

   gdzie $a = \prod_{j=1}^{k} a_j, b = \prod_{j=1}^{k} b_j$.

   $\Big($Wsk. Pokaż najpierw, że $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2k}\right)^n \geq 1 - \frac{n\varepsilon}{2k}$, dla $n = 1, \ldots, k\Big)$

2. Udowodnij następujący

   Lemat 2 (Nierówność Markowa)**.** *Niech* X *będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy* $\forall r > 0$

   $$P(X \geq r) \leq \frac{EX}{r}$$

3. Udowodnij następujący

   Lemat 3 (Nierówność Czebyszewa)**.** *Niech* X *będzie zmienną losową o średniej* $\mu < \infty$ *i wariancji* $\sigma^2 < \infty$*. Wtedy* $\forall r > 0$

   $$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

4. (*) Udowodnij następujący

   Lemat 4 (Nierówność Chernoffa)**.** *Niech* X_i *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0)$*. Niech* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *oraz* $\mu = ES = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{p}$*. Wtedy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *zachodzi*

   $$P(X > (1+\varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}\right)^u$$

5. (*) Mamy dane $a = (a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{N}$ oraz $b \in \mathbb{N}$.

Rozważmy przestrzeń "konfiguracji" $\{0,1\}^n$. Konfiguracje $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ nazywamy *poprawną* jeśli $a \cdot x := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$. Skonstruuj łańcuch Markowa (algorytm), którego rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny na wszystkich poprawnych konfiguracjach, tzn.

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z} & \text{jeśli } x \text{ jest } \textit{poprawną} \text{ konfiguracją} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Uwaga: (Problem plecakowy) Jeśli wektor a oznacza wagi n przedmiotów, a b jest maksymalna pojemnością plecaka, wtedy Z można interpretować jako liczbę możliwych kombinacji przedmiotów, które mogą być umieszczone w plecaku.