**Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa** 16.05.2016

Lista nr 10

Paweł Lorek

1. Niech $\mathbf{C}$ będzie macierzą $M \times M$ zdefiniowaną następująco: $\mathbf{C}(i,j) = 1$ jeśli $i \leq j$, 0 w przeciwnym przypadku. Policz macierz odwrotną do $\mathbf{C}$.

2. (Przypomnienie z wykładu). Rzucamy tak długo symetryczną monetą, aż pojawi się wzorzec $OOR$ - wtedy wygrywamy - lub wzorzec $ORR$ - wtedy przegrywamy. Stosując dualność Siegmunda policz prawdopodobieństwo wygrania.

3. (Przykład 3.2 *"Cat Eats Mouse Eats Cheese"* z książki P. Bremaud [?, ?, ?], 1999.) Mysz poruszą się między pokojami (Fig. 1). Jeśli w danej chwili jest w pokoju z $k$ sąsiadującymi pokojami, to w następnym kroku będzie wybierze sąsiadujący pokój z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$. Jeśli dotrze do pokoju 5., gdzie znajduje się ser, to już tam pozostaje. Natomiast jeśli dotrze do pokoju nr 3, gdzie znajduje się kot, to zostaje zjedzona. Stosując dualność Siegmunda policz prawdopodobieństwo dotarcia do pokoju nr 5 (WYGRANIA) przed dotarciem do pokoju nr 3 (PRZEGRANIA) startując z pokoju $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

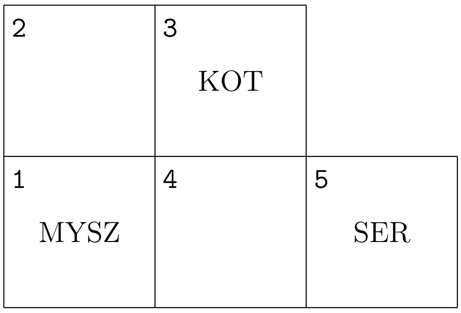


Figure 1: Maze, mouse, and murder

4. Niech $\mathbb{E} = \{0,1\}^d$ oraz $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_d) \in \mathbb{E}$, tzn $\mathbf{e}_i\{0,1\}$. Wprowadźmy na tej przestrzeni porządek częściowy $\mathbf{e} \preceq \mathbf{e}' \iff e_i \leq e'_i, i = 1, \ldots, d$. Niech $\mathbf{C}$ będzie macierzą rozmiaru $|E| \times |E|$, tzw. macierzą porządku, tj. $\mathbf{C}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') = 1$ jeśli $\mathbf{e} \preceq \mathbf{e}'$ oraz 0 w przeciwnym przypadku. Pokaż, że macierz odwrotna jest postaci:

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') = \begin{cases} (-1)^{|\mathbf{e}'|-|\mathbf{e}|} & \text{jeśli } \mathbf{e} \preceq \mathbf{e}', \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $|\mathbf{e}| = \sum_{i=1}^{d} e_i$.