Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 01.03.2016

Lista nr 1, ver B

Paweł Lorek

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Niech T będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Pokaż, że $ET = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k)$.

2. Udowodnij następujący

   Lemat 1 (Nierówność Markowa)**.** *Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy $\forall r > 0$*
   $$P(X \geq r) \leq \frac{EX}{r}$$

3. Udowodnij następujący

   Lemat 2 (Nierówność Czebyszewa)**.** *Niech X będzie zmienną losową o średniej $\mu < \infty$ i wariancji $\sigma^2 < \infty$. Wtedy $\forall r > 0$*
   $$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

4. Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $1 + x \leq e^x$

5. Udowodnij następujący

   Lemat 3 (Nierówność Chernoffa)**.** *Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0)$. Niech $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $\mu = ES = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi*
   $$P(S > (1 + \varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)^{1+\varepsilon}}\right)^{\mu}$$
   oraz
   $$P(S < (1 - \varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1 - \varepsilon)^{1-\varepsilon}}\right)^{\mu}$$

6. Pokaż, iż poprzednie zadanie implikuje
   $$P(S < (1 - \varepsilon)\mu) \leq e^{\frac{-\mu^2\varepsilon^2}{2}}$$

Łańcuchy Markowa

7. Dla Przykładu 1. z wykładu, tj. dla prostego symetryczneg błądzenia po 4 stanach: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

z rozkładem początkowym $\mu = (1, 0, 0, 0)$

a) Oblicz μ^3

b) Oblicz μ^n ("zgadując" rozwiązanie i udowadniając indukcyjnie, że jest ono poprawne).

8. Model pogody Gothenburga. Rozważmy uproszczony model pogody: rozważamy tylko dwa stany: "deszcz" i "słońce". Po dniu deszczowym następuje dzień deszczowy z prawd. 0.75, natomiast po dniu słonecznym następuje dzień słoneczny z prawd. również 0.75. Oznaczmy przestrzeń stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, gdzie $\mathbf{e}_1$ oznacza dzień deszczowy, a $\mathbf{e}_2$ dzień słoneczny. Wtedy macierz przejść wygląda następująco:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Załóżmy, że $\mu = (0, 1)$.

a) Oblicz μ^2.

b) Oblicz μ^n stosując diagonalizację macierzy $\mathbf{P}$.

9. W modelu pogody "L.A.", tj. modelu podobnym do poprzedniego zadania, ale z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix}$$

(przykład rozważany na wykładzie). Podaj wzór na μ^k dla

a) $\mu = (1, 0)$, b) $\mu = (1/2, 1/2)$, c) $\mu = (1/6, 5/6)$

Czy w którymś z przypadków można zaobserwować coś ciekawego? Co to może oznaczać?

Do czego zbiega μ^k, w każdym z przypadków, gdy $k \to \infty$?

10. Niech $(X_0, X_1, \ldots)$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejść $\mathbf{P}$ i przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$, tzn. $P(X_{n+1} = \mathbf{e}_j | X_n = \mathbf{e}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Pokaż, że

$$P(X_{n+m} = \mathbf{e}_j | X_n = \mathbf{e}_i) = \mathbf{P}^m(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

11. Dla zadań 7, 8, 9 b) wskaż poprawne funkcje inicjalizujące oraz updatujące.

12. Dla zadania 8 wskaż min. dwie różne funkcje updatujące (funkcje updatujące nie są wyznaczone jednoznacznie).

13. Dla tasowania kart Top-To-Random dla $n = 3$ kart narysuj graf przejść oraz podaj macierz przejść $\mathbf{P}$. Wylicz również $\mathbf{P}^2$.

14. Dla dwóch miar probabilistycznych μ, ν na $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$ definiujemy *normę całkowitego wahania*: $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in E} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$.

Oblicz normę całkowitego wahania między rozkładami:

$\mu \sim Bin(4, 1/2), \nu \sim Bin(4, 1/4)$

15. Na przestrzeni $E = \{1, 2\}$ zdefiniujmy: $\mu^k = \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k, \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k\right]$, oraz $\nu = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

   a) Oblicz $d_{TV}(\mu^k, \nu)$.
   b) Dla jakiego (całkowitego) k norma całkowitego wahania między μ^k i ν jest mniejsza od 0.01?

16. Rozważmy n kart. Niech μ będzie rozkładem jednostajnym na wszystkich permutacjach n kart. Natomiast niech ν będzie rozkładem jednostajnym na wszystkich takich permutacjach, w których pierwsza karta jest ustalona.

Oblicz $d_{TV}(\mu, \nu)$.