

1. Normę całkowitego wahania między miarami ν i μ na \mathbb{E} zdefiniowaliśmy jako $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sum_{\mathbf{e}: \mu(\mathbf{e}) > \nu(\mathbf{e})} (\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})) = \sum_{\mathbf{e}: \nu(\mathbf{e}) > \mu(\mathbf{e})} (\nu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{e})).$$

2. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subseteq \mathbb{E}} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

$$\text{gdzie } \mu(A) := \sum_{\mathbf{e} \in A} \mu(\mathbf{e}).$$

3. Podaj przykład macierzy przejść \mathbf{P} rozmiaru 3×3 takiej, która ma przynajmniej dwa różne rozkłady stacjonarne, tzn. takie, że $\pi \mathbf{P} = \pi$. Czy można wskazać taką macierz \mathbf{P} dla której dowolna miara probabilistyczna jest miarą stacjonarną?
4. Niech $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\mathbb{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$. Dla całkowitych $a, a' > 0$ i dowolnego $\mathbf{e} \in \mathbb{E}$ pokaż, że

$$P(X_a = \mathbf{e}, X_{a+a'} = \mathbf{e} | X_0 = \mathbf{e}) = P(X_{a'} = \mathbf{e} | X_0 = \mathbf{e}) \cdot P(X_a = \mathbf{e} | X_0 = \mathbf{e})$$

5. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

i z rozkładem początkowym $\mu = (1, 0, 0, 0)$. Niech $T_{13} = \min\{n \geq 1 : X_n = 3\}$. Oblicz $\tau_{13} = ET_{13}$.

6. *Model urnowy Ehrenfestów.* N cząstek może być albo w pojemniku A albo w B . Załóżmy, że w chwili $n \geq 0$, $X_n = i$ cząstek jest w pojemniku A . Wtedy jedna cząstka wybierana jest losowo i w chwili $n+1$ jest przekładana do drugiego pojemnika. Zatem stan w chwili $n+1$, tzn. X_{n+1} to albo $i-1$ albo $i+1$. Przestrzenią stanów jest zatem $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N\}$. Podaj macierz \mathbf{P} i znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

7. Nawiązując do poprzedniego zadania: Załóżmy, że mamy N cząstek i każdą wkładamy do pojemnika A lub B z jednakowym prawdopodobieństwem. Jaki jest rozkład liczby cząstek w pojemniku A po takiej operacji?
8. *Proces urodzin i śmierci z dwoma odbijającymi barierami.* Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} & \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \dots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

9. Znajdź rozkład stacjonarny łańcucha Markowa X na przestrzeni $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

10. *Tasowanie kart TOP-TO-RANDOM:* Tasujemy n kart w następujący sposób: zawsze bierzemy kartę z góry i z prawdopodobieństwem $1/n$ wkładamy je w dowolne miejsce w talii (w szczególności może pozostać na swoim miejscu lub znaleźć się na samym dole). Pokaż z definicji, że $\pi(\mathbf{e}) = 1/n!$ dla każdego $\mathbf{e} \in \mathbb{E}$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.
11. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejść \mathbf{P}^X i przestrzenią stanów $\mathbb{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}$. Tworzymy ciąg $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ na podstawie X w taki sposób, iż notujemy tylko *nowe wartości* X_n . Tzn. jeśli przez ileś kroków łańcuch X pozostaje w tym samym stanie, to łańcuch Y się nie zmienia, czeka aż X się zmieni. Dla przykładu:

$$\begin{array}{cccccccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ X_n = & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \\ Y_0 = \mathbf{e}_1 & & & Y_1 = \mathbf{e}_2 & & Y_2 = \mathbf{e}_1 & Y_3 = \mathbf{e}_3 & & & Y_4 = \mathbf{e}_2 & Y_5 = \mathbf{e}_1 \end{array}$$

Pokaż, że $\{Y\}_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i podaj jego prawdopodobieństwa przejść w języku prawdopodobieństw przejść łańcucha X .

12. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ i $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ będą dwoma jednorodnymi łańcuchami Markowa o tej samej przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{1, 2\}$ i macierzy przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Załóżmy, że $X_0 = 1, Y_0 = 2$. Podaj rozkład pierwszej chwili, w której oba łańcuchy są w tym samym stanie.

13. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie łańcuchem Markowa z dwoma różnymi rozkładami stacjonarnymi π i π' . Pokaż, że wówczas $p\pi + (1 - p)\pi'$ dla dowolnego $p \in (0, 1)$ również jest rozkładem stacjonarnym.
14. Rozważmy następujący łańcuch Markowa X : Niech $a, b \geq 2$ będą liczbami całkowitymi. Przestrzeń stanów:

$$\mathbb{E} = \{(x, y) : x \in \{0, \dots, a - 1\}, y \in \{0, \dots, b - 1\}\}.$$

Dynamika łańcucha jest następująca: Będąc w stanie (x, y) w chwili n , w następnej chwili łańcuch albo jest w stanie $((x+1) \bmod a, y)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ albo w stanie $(x, (y+1) \bmod b)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

- Pokaż, że łańcuch X jest nieredukowalny
- Pokaż, że łańcuch X jest nieokresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(a, b) = 1$