Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 09.11.2013

Lista nr 5

Paweł Lorek

Przypomnijmy krótko **hard-core model** przedstawiony na wykładzie. Mamy dany graf $G = (V, K)$, gdzie $V = \{v_1, \ldots, v_M\}$ (wierzchołki) oraz K jest zbiorem krawędzi. Do każdego wierzchołka przypisujemy *spin* -1 lub +1, każde takie przypisanie nazywamy *konfiguracją*.
$\xi \in \{-1, +1\}^V$ jest natomiast *poprawną konfiguracją* (PK) jeśli żadne 2 wierzchołki, które są sąsiadami w grafie G nie mają oba wartości +1.
Na wykładzie podana była konstrukcja MCMC (Gibbs sampler), którego przestrzeń stanów jest zbiorem wszystkich możliwych poprawnych konfiguracji, a rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny:

$$\pi_G(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z_G} & \text{jeśli } \xi \in PK \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

gdzie Z_G jest stałą normalizacyjną, tj. $Z_G = \sum_{\xi \in \{0,1\}^V} \mathbf{1}(\xi \in PK)$.

1. Pokaż, że algorytm Gibbs dla modelu hard-core jest *nieredukowalnym* łańcuchem Markowa.

2. Pokaż, że dla każdego wierzchołka $v \in V$, warunkowe prawdopodobieństwo, że v przyjmuje wartość +1, pod warunkiem, że wszyscy sąsiedzi mają wartość -1, wynosi 1/2.

3. Rozważmy następujący **uogólniony hard-core model**. Model ten pozwala na różne "intensywności +1" w grafie. Jest to zrobione poprzez wprowadzenie parametru $\lambda > 0$. W tym modelu każda poprawna konfiguracja ma prawdopodobieństwo

   $$\pi_{G,\lambda}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\eta(\xi)}}{Z_{G,\lambda}} & \text{jeśli } \xi \in PK \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

   gdzie $\eta(\xi)$ jest liczbą "plus jedynek" w konfiguracji ξ, a $Z_{G,\lambda}$ jest stałą normalizacyjną, tj. $Z_{G,\lambda} = \sum_{\xi \in \{0,1\}^V} \lambda^{\eta(\xi)} \mathbf{1}(\xi \in PK)$.

   Udowodnij, że dla każdego wierzchołka $v \in V$, wartunkowe prawdopodobieństwo, że v przyjmuje wartość +1, pod warunkiem, że wszyscy sąsiedzie mają wartość -1, wynosi $\dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$.

4. Skonstruuj algorytm MCMC dla uogólnionego modelu hard-core.