Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 19.04.2016

Lista nr 6

Paweł Lorek

1. Rozważmy graf $G = (V, K)$ z $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ oraz $K = \{(i, i+1) : i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}\}$. Pokaż, ze w modelu hard-core na tym grafie (jednowymiarowy model hard-core) wszystkich poprawnych konfiguracji jest f_{N+1}, gdzie f_k jest ciągiem Fibonacciego ($f_0 := f_1 := 0, f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ dla $k \geq 1$).

2. Ile jest poprawnych $q-$kolorowań grafu z zadania 1 ?

3. Ile jest poprawnych $q-$kolorowań dla grafu będącego pełnym drzewem binarnym o głębokości n

4. Niech $G = (V, K)$ będzie dowolnym spójnym grafem z $|V| = N$. Niech X będzie zmienną losową jednostajną na zbiorze $\{1, 2, \ldots, q\}^V$ (tzn. wybieramy jednostajnie ze wszystkich możliwych pokolorwań grafu). Udowodnij, ze prawdopodobieństwo, iż X jest poprawnym $q-$kolorowaniem grafu można z góry ograniczyć przez
$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^{N-1}$$

5. Niech $G = (V, K)$ będzie dowolnym spójnym grafem o maksymalnym stopniu wierzchołka d^*. Niech $q = d^* + 1$. Pokaż, że wtedy istnieje przynajmniej jedno poprawne $q-$kolorowanie grafu. Pokaz również, że algorytm Gibbsa dla $q-$kolorowania nie musi być wtedy nieredukowalny.

6. Niech $q = d^* + 2$ w poprzednim zadaniu. Pokaż, że wówczas algorytm Gibbsa dla $q-$kolorowania jest nieredukowalny.

7. Udowodnij następujący

   Lemat 1 *Niech $\varepsilon \in [0, 1]$, niech k będzie dodatnią liczbą naturalną oraz $a_1, \ldots, a_k$ i $b_i, \ldots, b_k$ będą nieujemnymi liczbami spełniającymi*
$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2k}\right) \leq \frac{a_j}{b_j} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2k}\right), \qquad j = 1, \ldots, k.$$
   Wtedy
$$1 - \varepsilon \leq \frac{a}{b} \leq 1 + \varepsilon,$$
   gdzie $a = \prod_{j=1}^{k} a_j, b = \prod_{j=1}^{k} b_j.$