

1. Niech $R = (R^1, \dots, R^q)$ będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, q\}$ - prawdopodobieństwo każdej możliwej permutacji jest jednakowe. Ustalmy $S \subset \{1, \dots, q\}$. Zdefiniujmy

$$X = R^i, \quad \text{gdzie} \quad i = \min_j \{j : R^j \in S^C\}$$

(S^C to dopełnienie S). Pokaż, że $X \sim \text{Unif}(S^C)$, tzn. ma rozkład jednostajny na S^C .

2. Niech X i X' będą dwoma q -pokolorowaniami grafu $G = (V, K)$. Ustalmy wierzchołek $v \in V$. Niech $S(X(v))$ będzie zbiorem kolorów występujących u sąsiada v w kolorowaniu X oraz:

$$B_2 = \{r \in \{1, \dots, q\} : r \in S(X(v)) \cap S(X'(v))\}$$

$$B_1 = \{r \in \{1, \dots, q\} : r \in [S(X(v)) \cap (S(X'(v)))^C] \cup [((S(X(v)))^C \cap S(X'(v)))]\}$$

$$B_0 = \{r \in \{1, \dots, q\} : r \in [S(X(v)) \cup S(X'(v))]^C\}$$

Niech $R = (R^1, \dots, R^q)$ będzie losową permutacją jak w zadaniu 1.

$$Y = R^a, \quad \text{gdzie} \quad a = \min_j \{j : R^j \in S(X(v))^C\}$$

$$Z = R^b, \quad \text{gdzie} \quad b = \min_j \{j : R^j \in S(X'(v))^C\}$$

Pokaż, że $P(Y = Z) = \frac{|B_0|}{|B_0| + |B_1|}$, gdzie $|B_i|$ to moc zbioru B_i .

3. Opisz prosty i wydajny sposób generowania losowej (o rozkładzie jednostajnym) permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, d\}$.
4. Rozważmy algorytm Gibbs dla q -kolorowania grafu, wersję z losowaniem wierzchołków (nie "sweep"). Niech $G = (V, K)$, $V = \{v_1, \dots, v_M\}$. Pokaż, że dla każdego $v \in V$, prawdopodobieństwo tego, że v zostanie wybrany podczas pierwszych M iteracji algorytmu wynosi co najmniej $1 - \frac{1}{e}$.
5. Dla $G = (V, E)$ podzbiór wierzchołków $I \subset V$ nazywa się *zbiorem niezależnym* w G jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie są połączone krawędzią w G . Niech $\mathcal{I}(G)$ oznacza wszystkie zbiory niezależne w G . Podaj przykład łańcucha, którego rozkład stacjonarny jest rozkładem jednostajnym na $\mathcal{I}(G)$.

Wsk: Możesz skonstruować algorytm Gibbsa, który losuje dowolny wierzchołek i rozważa jego usunięcie lub dodanie do obecnego zbioru niezależnego / stanu)