

Def. Niech X będzie ergodycznym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów \mathbb{E} , macierzą przejść \mathbf{P} , rozkładem początkowym ν i rozkładem stacjonarnym π . Zmienną losową T (implicite zależy ona od rozkładu początkowego ν) nazywamy **Strong Stationary Time (SST)** jeśli jest czasem zatrzymania oraz

$$\forall \mathbf{e} \in \mathbb{E} : P(X_k = \mathbf{e} | T = k) = \pi(\mathbf{e}).$$

Def. Dla dwóch miar μ, ν na \mathbb{E} “**separation distance**” definiujemy jako

$$s(\mu, \nu) = \max_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} \left(1 - \frac{\mu(\mathbf{e})}{\nu(\mathbf{e})} \right).$$

Lemat A. $d_{TV}(\mu, \nu) \leq s(\mu, \nu)$.

Twierdzenie B. Jeśli T jest SST dla łańcucha X to

$$s(\mu \mathbf{P}^n, \pi) \leq P(T > n).$$

1. **Matching w grafie (dokładny opis był na wykładzie)** Mamy $2n$ wierzchołków $\{1, \dots, 2n\}$. Matchingiem nazywamy podział zbioru wierzchołków na n dwuelementowych, rozłącznych podzbiorów. Ile mamy matchingów w grafie o $2n$ wierzchołkach?
2. Rozważmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów

$\mathbb{E} = \{\text{zbior mozliwych matchingow na } 2n \text{ wierzchołkach}\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{jeli } \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \\ \frac{1}{n^2} & \text{jeli } \mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_j \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_j$ jeśli stany te różnią się jedną tzw. *wymianą*: tzn. gdy w jednym z tych stanów wybierzemy dwie pary i *wymienimy* w tych parach wierzchołki.

Pokaż, że powyższa macierz \mathbf{P} rzeczywiście jest macierzą prawdopodobieństw przejść, oraz, że rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny na \mathbb{E} .

3. Przypomnij z wykładu konstrukcję SST T dla matchingu. Co do rozkładu mamy równość $T = \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Geo(p_i)$ z parametrem p_i . Podaj wartość tego parametru.

4. Korzystając z nierówności Czebyszewa i z wyniku poprzedniego zadania, pokaż, że

$$s(\mu \mathbf{P}^{2n \log n + cn}, \pi) \leq P(T > 2n \log n + cn) \leq \frac{1}{c^2}$$

5. *Błądzenie losowe po d -wymiarowej kostce.* Przestrzeń stanów: $\mathbb{E} = \{0, 1\}^d$. W każdym kroku wybieramy jedną z d współrzędnych losowo (jednostajnie), a następnie rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł ustawiamy tą współrzędną na +1, jeśli reszka, to na 0. Znajdź SST, podaj, dla jakiego n "separation distance" (korzystając z Twr. B) jest małe.
6. *Błądzenie losowe po d -wymiarowej kostce, ver 2.* Przestrzeń stanów jak w poprzednim zadaniu. Teraz jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{d+1}$ zmieniamy daną współrzędną (0 na 1 lub 1 na 0) oraz z tym samym prawdopodobieństwem nic nie zmieniamy. Znajdź SST dla tego przykładu.
7. Mamy n kart. W jednym kroku, do każdej karty niezależnie, dopisujemy 0 lub 1 z jednakowym prawdopodobieństwem. Zatem, po t krokach, każda karta ma przypisany ciąg binarny długości t . Niech T oznacza pierwszy moment, gdy wszystkie n ciągów są różne. Pokaż, że

$$P(T \leq t) \approx \exp\left(-\frac{n^2}{2^t}\right) \quad (*)$$

Użyj: $1 - \frac{i}{2^t} \approx \exp\left(-\frac{i}{2^t}\right)$

Uwaga: Powyżej opisana zmienna losowa T jest SST dla tzw. tasowania kart *riffle shuffling*. Z (*) wynika, iż $P(T > t) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2^t}\right)$ i jest to małe, gdy $t \ll 2 \log n$ oraz duże (bliskie 1), gdy $t \gg 2 \log n$.

8. Niech \mathbf{P} będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \dots, N\}$. Załóżmy, że jest on stochastycznie monotoniczny Pokaż, że wtedy funkcja aktualizująca

$$\phi(i, u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \in [0, \mathbf{P}(i, 1)) \\ 1 & \text{dla } u \in [\mathbf{P}(i, 1), \mathbf{P}(i, 1) + \mathbf{P}(i, 2)) \\ \vdots & \\ r & \text{dla } u \in \left[\sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{P}(i, k), \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(i, k) \right) \\ \vdots & \\ N & \text{dla } u \in \left[\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{P}(i, k), 1 \right] \end{cases}$$

jest monotoniczna, tzn., że

$$\forall (i \leq j, i, j \in \{0, \dots, N\}) \forall u \in [0, 1] \quad \phi(i, u) \leq \phi(j, u).$$