Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 24.01.2018

Lista nr 10

Paweł Lorek

Def. Niech X będzie ergodycznym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\mathbb{E}$, macierzą przejść $\mathbf{P}$, rozkładem początkowym ν i rozkładem stacjonarnym π. Zmienną losową T (implicite zależy ona od rozkladu początkowego ν) nazywamy **Strong Stationary Time (SST)** jeśli jest czasem zatrzymania oraz

$$\forall \mathbf{e} \in \mathbb{E}: \quad P(X_k = \mathbf{e} | T = k) = \pi(\mathbf{e}).$$

Def. Dla dwóch miar μ, ν na $\mathbb{E}$ **"separation distance"** definiujemy jako

$$s(\mu, \nu) = \max_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} \left(1 - \frac{\mu(\mathbf{e})}{\nu(\mathbf{e})}\right).$$

Lemat A. $d_{TV}(\mu, \nu) \le s(\mu, \nu)$.

Twierdzenie B. Jeśli T jest SST dla łańcucha X to

$$s(\mu \mathbf{P}^n, \pi) \le P(T > n).$$

1. **Matching w grafie (dokładny opis był na wykładzie)** Mamy $2n$ wierzchołków $\{1, \ldots, 2n\}$. Matchingiem nazywamy podział zbioru wierzchołków na n dwuelementowych, rozłącznych podzbiorów. Ile mamy matchingów w grafie o $2n$ wierzchołkach?

2. Rozważmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów

   $\mathbb{E} = \{zbior\ mozliwych\ matchingow\ na\ 2n\ wierzcholkach\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{jeli} \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \\ \frac{1}{n^2} & \text{jeli} \quad \mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_j \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

   gdzie $\mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_j$ jeśli stany te różnią się jedną tzw. *wymianą*: tzn. gdy w jednym z tych stanów wybierzemy dwie pary i *wymienimy* w tych parach wierzchołki.

   Pokaż, że powyższa macierz $\mathbf{P}$ rzeczywiście jest macierzą prawdopodobieństw przejść, oraz, że rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny na $\mathbb{E}$.

3. Przypomnij z wykładu konstrukcję SST T dla matchingu. Co do rozkładu mamy równość $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Geo(p_i)$ z parametrem p_i. Podaj wartość tego parametru.

4. Policz ET oraz $VarT$ dla T z poprzedniego zadania. Korzystając z nierówności Czebyszewa, pokaż, że

$$s(\mu\mathbf{P}^{2n\log n+cn},\pi) \leq P(T > 2n\log n + cn) \leq \frac{1}{c^2}.$$

5. *Błądzenie losowe po d-wymiarowej kostce.* Przestrzeń stanów: $\mathbb{E} = \{0,1\}^d$. W każdym kroku wybieramy jedną z d współrzędnych losowo (jednostajnie), a nastepnie rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł ustawiamy tą współrzędną na $+1$, jeśli reszka, to na 0. Znajdź SST, podaj, dla jakiego n "separation distance" (korzystając z Twr. B) jest małe.

6. *Błądzenie losowe po d-wymiarowej kostce, ver 2.* Przestrzeń stanów jak w poprzednim zadaniu. Teraz jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{d+1}$ zmieniamy daną współrzędną (0 na 1 lub 1 na 0) oraz z tym samym prawdopodobieństwem nic nie zmieniamy. Znajdź SST dla tego przykładu.

7. Mamy n kart. W jednym kroku, do każdej karty niezależnie, dopisujemy 0 lub 1 z jednakowym prawdopodobieństwem. Zatem, po t krokach, każda karta ma przypisany ciąg binarny długości t. Niech T oznacza pierwszy moment, gdy wszystkie n ciągów są różne. Pokaż, że

$$P(T \leq t) \approx exp\left(-\frac{n^2}{2^t}\right) \qquad (*)$$

Użyj: $1 - \frac{i}{2^t} \approx exp\left(-\frac{i}{2^t}\right)$

Uwaga: Powyżej opisana zmienna losowa T jest SST dla tzw. tasowania kart *riffle shuffling*. Z $(*)$ wynika, iz $P(T > t) \approx 1 - exp\left(-\frac{n^2}{2^t}\right)$ i jest to małe, gdy $t \ll 2\log n$ oraz duże (bliskie 1), gdy $t \gg 2\log n$.