Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa 12.10.2017

Lista nr 2

Paweł Lorek

1. Niech X będzie nieredukowalnym i nieokresowym łańcuchem Markowa na przestrzeni $\mathbb{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$ o macierzy przejść $\mathbf{P}$. Określmy $T_{i,j} = \min\{n \geq 1 : X_n = \mathbf{e}_j \,|X_0 = \mathbf{e}_i\}$ (przyjmując konwencję: $T_{i,j} = \infty$ jeśli łańcuch nigdy nie będzie w $\mathbf{e}_j$). Przypomnijmy: dla nieredukowalnego i nieokresowego łańcucha mamy $\forall(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \mathbb{E})\ \tau_{i,j} = ET_{i,j} < \infty$.

   Na wykładzie zdefiniowaliśmy

$$\rho(\mathbf{e}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(X_n = \mathbf{e}_i, T_{1,1} \geq n)$$

   i pokazaliśmy, że $\pi(\mathbf{e}_j) := \dfrac{\rho(\mathbf{e}_j)}{\tau_{1,1}}$ spełnia

$$\pi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{M} \pi(\mathbf{e}_i)\mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \tag{1}$$

   dla $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{e}_1$. Pokaż, że (1) zachodzi także dla $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_1$.

2. Dla X jak w poprzednim zadaniu zdefiniujmy N_i jako liczbę wizyt w $\mathbf{e}_i$ pomiędzy wizytami w $\mathbf{e}_1$ (dla $i = 1$ nie liczmy pierwszej wizyty, tzn. $N_1 = 1$). Pokaż, że

$$EN_i = \rho(\mathbf{e}_i)$$

3. Dla zadań 7, 8, 9 b) z Listy 1. wskaż poprawne funkcje inicjalizujące oraz updatujące (minimum dwie dla zad 8.).

4. Normę całkowitego wahania między miarami ν i μ na $\mathbb{E}$ zdefiniowaliśmy jako $d_{TV}(\mu, \nu) = \dfrac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sum_{\mathbf{e}:\mu(\mathbf{e})>\nu(\mathbf{e})} (\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})) = \sum_{\mathbf{e}:\nu(\mathbf{e})>\mu(\mathbf{e})} (\nu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{e})).$$

5. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subseteq \mathbb{E}} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

   gdzie $\mu(A) := \sum_{\mathbf{e} \in A} \mu(A)$.

6. Podaj przykład macierzy przejść $\mathbf{P}$ rozmiaru 3×3 takiej, która ma przynajmniej dwa różne rozkłady stacjonarne, tzn. takie, że $\pi\mathbf{P} = \pi$. Czy można wskazać taką macierz $\mathbf{P}$ dla której dowolna miara probabilistyczna jest miarą stacjonarną?

7. Niech $X = \{X\}_{n\geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\mathbb{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$. Dla całkowitych $a, a' > 0$ i dowolnego $\mathbf{e} \in \mathbb{E}$ pokaż, że

$$P(X_a = \mathbf{e}, X_{a+a'} = \mathbf{e}|X_0 = \mathbf{e}) = P(X_{a'} = \mathbf{e}|X_0 = \mathbf{e}) \cdot P(X_a = \mathbf{e}|X_0 = \mathbf{e})$$

8. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

i z rozkładem początkowym $\mu = (1, 0, 0, 0)$. Niech $T_{13} = \min\{n \geq 1 : X_n = 3\}$. Oblicz $\tau_{13} = ET_{13}$.

9. *Model urnowy Ehrenfestów.* N cząstek może być albo w pojemniku A albo w B. Załóżmy, że w chwili $n \geq 0$, $X_n = i$ cząstek jest w pojemniku A. Wtedy jedna cząstka wybierana jest losowo i w chwili $n + 1$ jest przekładana do drugiego pojemnika. Zatem stan w chwili $n + 1$, tzn. X_{n+1} to albo $i - 1$ albo $i + 1$. Przestrzenią stanów jest zatem $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$. Podaj macierz $\mathbf{P}$ i znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

10. Nawiązując do poprzedniego zadania: Załóżmy, że mamy N cząstek i każdą wkładamy do pojemnika A lub B z jednakowym prawdopodobieństwem. Jaki jest rozkład liczby cząstek w pojemniku A po takiej operacji?

11. *Proces urodzin i śmierci z dwoma odbijającymi barierami.* Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0\ldots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & \ldots & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

12. Znajdź rozklad stacjonarny łańcucha Markowa X na przestrzeni $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejść
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix},$$
gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

13. *Tasowanie kart* Top-To-Random: Tasujemy n kart w następujący sposób: zawsze bierzemy kartę z góry i z prawdopodobieństwem $1/n$ wkładamy je w dowolne miejsce w talii (w szczególności może pozostać na swoim miejscu lub znaleźć się na samym dole). Pokaż z definicji, że $\pi(\mathbf{e}) = 1/n!$ dla każdego $\mathbf{e} \in \mathbb{E}$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.

14. Dla tasowania n kart metodą Top-To-Random wskaż najmniejsze możliwe N takie, że $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in E = \mathcal{S}_n$ (wszystkie permutacje zbioru $\{1, \ldots, n\}$) mamy $Pr(X_N = \sigma_2 | X_0 = \sigma_1) > 0$.

15. Kontynuując poprzednie zadanie: pokaż, że w chwili N rozkład łańcucha nie jest jednostajny. Dla $n = 3$ wylicz $d_{TV}(\mu^N, \mathcal{U})$, gdzie $\mathcal{U}$ jest rozkładem jednostajnym na permutacjach zbioru $\{1, 2, 3\}$.

16. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą przejść $\mathbf{P}^X$ i przestrzenią stanów $\mathbb{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$. Tworzymy ciąg $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ na podstawie X w taki sposób, iż notujemy tylko *nowe wartości* X_n. Tzn. jeśli przez ileś krokow łańcuch X pozostaje w tym samym stanie, to łańcuch Y się nie zmienia, czeka aż X się zmieni. Dla przykładu:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_n =$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$
	$Y_0 = \mathbf{e}_1$			$Y_1 = \mathbf{e}_2$		$Y_2 = \mathbf{e}_1$	$Y_3 = \mathbf{e}_3$			$Y_4 = \mathbf{e}_2$	$Y_5 = \mathbf{e}_1$

Pokaż, że $\{Y\}_{n \geq 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i podaj jego prawdopodobieństwa przejść w języku prawdopodobieństw przejść łańcucha X.

17. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ i $Y = \{Y\}_{n \geq 0}$ będą dwoma jednorodnymi łańcuchami Markowa o tej samej przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{1, 2\}$ i macierzy przejść:
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix},$$
gdzie $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Załóżmy, że $X_0 = 1, Y_0 = 2$. Podaj rozkład pierwszej chwili, w ktorej oba łańcuchy są w tym samym stanie.

18. Niech $X = \{X\}_{n \geq 0}$ będzie łańcuchem Markowa z dwoma różnymi rozkladami stacjonarnymi π i π'. Pokaż, że wówczas $p\pi + (1-p)\pi'$ dla dowolnego $p \in (0, 1)$ również jest rozkładem stacjonarnym.

19. Rozważmy następujący łańcuch Markowa X: Niech $a, b \geq 2$ będą liczbami całkowitymi. Przestrzeń stanów:

$$\mathbb{E} = \{(x, y) : x \in \{0, \dots, a-1\}, y \in \{0, \dots, b-1\}\}.$$

Dynamika łańcucha jest nastepująca: Będąc w stanie (x, y) w chwili n, w następnej chwili łańcuch albo jest w stanie $((x+1) \bmod a, y)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ albo w stanie $(x, (y+1) \bmod b)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

- Pokaż, że łańcuch X jest nieredukowalny
- Pokaż, że łańcuch X jets nieokresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(a, b) = 1$