Symulacje i algorytmiczne zastosowania łańcuchów Markowa 29.10.2017

Lista nr 4

Paweł Lorek

1. Wyobraźmy sobie samotnego króla na szachownicy, wykonującego wszystkie możliwe ruchy z jednakowym prawdopodobieństwem (tzn. wybiera losowo każdy z sąsiadujących kwadratów i tam się porusza).
   - Czy łańcuch Markowa odpowiadający powyższemu błądzeniu jest nieokresowy i/lub nieredukowalny?
   - Jeśli istnieje, wskaż rozkład stacjonarny tego łańcucha.

2. Niech $(X_0, X_1, \ldots)$ będzie odwracalnym łańcuchem z przestrzenią stanów $\mathbb{E}$, macierzą przejść $\mathbf{P}$ i rozkładem odwracalnym π. Pokaż, że jeśli łańcuch zaczął z rozkładem początkowym $\mu = \pi$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i każdego $\mathbf{e}_{i_0}, \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n} \in \mathbb{E}$ zachodzi

$$P(X_0 = \mathbf{e}_{i_0}, X_1 = \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_n}) = P(X_0 = \mathbf{e}_{i_n}, X_1 = \mathbf{e}_{i_{n-1}}, \ldots, X_n = \mathbf{e}_{i_0}).$$

3. Udowodnij, że jeśli macierz prawdopodobieństw przejść łańcucha $\mathbf{P}$ jest *podwójnie stochastyczna*, tzn. zarówno wszystkie wyrazy w wierszach jak i w kolumnach, sumują się do 1, to rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jest rozkład jednostajny.

4. (Proste błądzenie losowe) Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 \ldots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & \ldots & & & & 0 & q_N & r_N \end{bmatrix},$$

gdzie $q_0 = p_N = 0$ oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha. (Na Liście nr 2 w zadaniu nr 8 był powyższy przykład z $p_0 = q_N = 1$).

5. (Proste błądzenie losowe po okręgu) Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 \ldots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ p_N & \ldots & & & & 0 & q_N & r_N \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{0, \ldots, N\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Innymi słowy jest to proste błądzenie po okręgu: będąc w i idziemy do $i+1$ z prawdopodobieństwem p_i, a do $i-1$ z prawdopodobieństwem q_i, gdzie rozumiemy, iż $N + 1 \equiv 0$ oraz $0 - 1 \equiv N$.

- Jaki warunek muszą spełniać parametry $p_i, q_i, i = 0, \ldots, N$, aby łańcuch był odwracalny?
- W przypadku, gdy łańcuch jest odwracalny, wskaż jego rozkład stacjonarny.

6. (Generowanie losowej tablicy z ustalona sumą wierszy i kolumn). Na Fig. 1 przedstawiona jest przykładowa tablica 4×4 z ustaloną sumą wierszy i kolumn.

	110	**274**	**84**	**118**
210	67	112	26	5
93	19	52	18	4
217	21	88	23	85
66	3	22	17	24

Figure 1: Przykładowa tablica z ustalonymi sumami wierszy i kolumn

Niech $\mathbb{E}$ będzie zbiorem tablic 4×4 o wyrazach całkowitych nieujemnych, których wiersze i kolumny sumują sie do tych samych wartości co w podanej przykładowej tablicy.

Wskaż jakąś (może ich być wiele) procedurę do generowania (w przybliżeniu) próbki z rozkładu jednostajnego na $\mathbb{E}$ (wskaż jakiś łańcuch Markowa o rozkładzie jednostajnym na $\mathbb{E}$).

7. Rozważmy n książek ponumerowanych od 1 do n. Książki umieszczone są w rzędzie na półce, na pozycjach od 1 (pierwsza z lewej) do n. W jednym kroku użytkownik wybiera książkę o numerze b z prawdopodobieństwem p_b, gdzie $0 < p_i < 1, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Jeśli wybrano książkę, która jest na pozycji pierwszej to nic się nie dzieje. Załóżmy, że wybrano książkę na pozycji $k > 1$. Wówczas jest ona zamieniana z książką na pozycji $k - 1$.

Opisany proces jest łańcuchem Markowa, nazwijmy go X. Rozważmy następujący opis stanu: $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, gdzie e_b oznacza *pozycję* książki b.

Podaj/opisz macierz przejścia łańcucha X oraz pokaż, że

$$\pi(\mathbf{e}) = \frac{1}{C} \prod_{r=1}^{n} p_r^{e_r},$$

jest jego rozkładem stacjonarnym ($C > 0$ jest stałą normującą).