Symulacje i algorytmiczne zastosowania łańcuchów Markowa	12.11.2017
Lista nr 5	
Paweł Lorek	

(Stała Poincarego). Niech X o macierzy przejść $\mathbf{P}$ będzie odwracalnym łańcuchem Markowa na grafie $G = (V, K)$, gdzie $V = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_M\}$ (wierzchołki) oraz $K = \{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) : \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) > 0\}$ (krawędzie). Dla skierowanej krawędzi $\tilde{k} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ (o wierzchołkach $\mathbf{e}_i$ - początkowy, i $\mathbf{e}_j$ -końcowy) zdefiniujmy $\Lambda(\tilde{k}) = \pi(\mathbf{e}_i)\mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.
Dla ustalonych wierzchołków $\mathbf{e}_i$ oraz $\mathbf{e}_j$ ustalamy deterministyczną, jednoznaczną scieżkę od $\mathbf{e}_i$ do $\mathbf{e}_j$ oznaczoną $\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Dla ustalonej ścieżki jej długość definiujemy jako: $|\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)| = \sum_{\tilde{k} \in \Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} 1$. **Stałą Poincarego** definijemy jako:

$$\gamma_P := \max_{\tilde{k}} \left\{ \frac{1}{\Lambda(\tilde{k})} \sum_{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) : \tilde{k} \in \Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} |\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)| \pi(\mathbf{e}_i) \pi(\mathbf{e}_j) \right\}$$

(dla ustalonego $\tilde{k}$ suma jest po wszystkich wierzchołkach $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ takich, że krawędź $\tilde{k}$ należy do ścieżki $\Gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$)

Niech λ_2 oznacza drugą (co do wart. bezwzgl.) wartość własną macierzy $\mathbf{P}$ odwracalnego łańcucha Markowa X. Przypomnijmy dwa twierdzenia z wykładu:

Twierdzenie A.

$$|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{\gamma_P}$$

Również dla odwracalnego, ergodycznego łańcucha $X \sim \mathbf{P}$ definiujemy **stałą Cheegera**

$$\gamma_C := \min_{A \subset \mathbb{E} : \pi(A) \leq 1/2} \frac{\sum_{\mathbf{e}_i \in A} \sum_{\mathbf{e}_j \in A^C} \pi(\mathbf{e}_i) \mathbf{P}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{\pi(A)}$$

Twierdzenie B.

$$|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{2} \gamma_C^2$$

Twierdzenie C1. Dla odwracalnego łańcucha $X \sim \mathbf{P}$ mamy

$$d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}} \mathbf{P}^n, \pi) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi(\mathbf{e})}} |\lambda_2|^n$$

($\delta_{\mathbf{e}} \mathbf{P}^n$ to rozkład łańcucha w $n-$tym kroku, takiego, który zaczął ze stanu $\mathbf{e}$)
Twierdzenie C2. Dla dowolnego (niekoniecznie odwracalnego) łańcucha $X \sim \mathbf{P}$ mamy

$$d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}} \mathbf{P}^n, \pi) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi(\mathbf{e})}} |\lambda_2(M)|^{\frac{n}{2}},$$

gdzie $\lambda_2(M)$ jest drugą (co do wartości bezwzględnej) wartością własną macierzy $M = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{P}}$.

1. Dla $\phi : \mathbb{E} \to \mathcal{R}$ zdefiniowaliśmyy $Var(\phi) = \sum_{\mathbf{e}} \phi^2(\mathbf{e})\pi(\mathbf{e}) - \sum_{\mathbf{e}} \pi(\mathbf{e})$.

   Pokaż, że $Var(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \mathbb{E}} (\phi(\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{e}_j))^2 \pi(\mathbf{e}_i)\pi(\mathbf{e}_j)$.

2. Niech $n(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę kroków, po której norma całkowitego wahania jest mniejsza od ε, tzn. $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$.

   Pokaż, że $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n_{\gamma_P}(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$ dla $n_{\gamma_P}(\varepsilon) = \gamma_P \log\left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi(\mathbf{e})}}\right)$ (gdzie γ_P jest stałą Poincarego)

3. Pokaż, że $d_{TV}(\delta_{\mathbf{e}}\mathbf{P}^{n_{\gamma_C}(\varepsilon)}, \pi) \leq \varepsilon$ dla $n_{\gamma_C}(\varepsilon) = \frac{2}{\gamma_C^2} \log\left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi(\mathbf{e})}}\right)$ (gdzie γ_C jest stałą Cheegera)

4. Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia ergodycznego łańcucha X z rozkładem stacjonarnym π. Macierz łańcucha odwróconego w czasie $\tilde{X}$ definiuje się następująco $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \frac{\pi(\mathbf{e}_1)}{\pi(\mathbf{e}_2)}\mathbf{P}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (łańcuch jest odwracalny jeśli $\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}$). Pokaż, że rozkładem stacjonarnym łańcucha $\tilde{X}$ jest również π.

5. Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą przejścia ergodycznego łańcucha X z rozkładem stacjonarnym π. Zdefiniujmy: $\mathbf{M} := \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{P}}$. Pokaż, że
   - $\mathbf{M}$ jest macierzą stochastyczną
   - π jest rozkładem stacjonarnym łańcucha o macierzy przejść $\mathbf{M}$. Czy łańuch ten jest odwracalny?

6. Rozważmy następujące symetryczne błądzenie po okręgu: $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-2p & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & 1-2p \end{bmatrix},$$

   gdzie $p < 1/2$.

   Policz (lub oszacuj) stałą γ_P.

7. Policz (lub oszacuj) stałą γ_C dla błądzenia z zadania 6.

8. Dla jakiego p γ_C jest "lepsza" od γ_P dla wyników otrzymanych w zadaniach 6 i 7? Poprzez "lepsza" rozumiemy, iż daje lepsze oszacowanie w Twierdzeniu B.

9. Rozważmy następujące błądzenie po okręgu: $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & 1-p \end{bmatrix},$$

Pokaż, iż licząc macierz $\mathbf{M} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{P}}$ zadanie liczenia/szacowania γ_C i γ_P sprowadza się do zadań 6 i 7. Podaj stosowne oszacowania.

10. Niech X będzie prostym błądzeniem po grafie $G = (V, K)$, gdzie $V = \{v_1, \ldots, v_M\}$ to zbiór wierzchołków, a K to zbiór krawędzi. Prawdopodobieństwa przejść: $\mathbf{P}(v_i, v_j) = 1/d(v_i)$ jeśli $(v_i, v_j) \in K$ ($d(v_i)$ to stopień wierzchołka v_i). Niech $\Gamma(v, v')$ oznacza jakiś wybór ścieżki z v do v', który nie ma powtarzających się krawędzi. Zdefiniujmy:

$$d^* = \max_v d(v), \qquad s^* = \max_{v,v'} |\Gamma(v, v')|, \qquad \eta^* = \max_{\tilde{k} \in K} \#\{(v, v') \in V^2 : \tilde{k} \in \Gamma(v, v')\}$$

Pokaż, że $\gamma_P \leq \dfrac{(d^*)^2 s^* \eta^*}{|K|}$