

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Łukasz Kowal

Wartości własne w procesach narodzin i śmierci z czasem
dyskretnym

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dra Pawła Loraka

Wrocław 2015

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie
i zgłaszam ją do oceny.

Data:.....

Podpis autora pracy:.....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data:.....

Podpis opiekuna pracy:.....

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Wprowadzenie teoretyczne	5
2.1	Wartości i wektory własne	5
2.1.1	Reprezentacja spektralna	8
2.1.2	Trójdzielne macierze Toeplitza	9
2.1.3	Trójdzielne pseudo macierze Toeplitza	13
2.1.4	Macierz Kaca	15
2.2	Łańcuchy Markowa z czasem dyskretnym	19
2.2.1	Tempo zbieżności ergodycznych łańcuchów Markowa do stacjonarności	22
2.2.2	Procesy narodzin i śmierci z czasem dyskretnym	23
2.2.3	Wartości własne dualnych łańcuchów Markowa	24
2.3	Teoria grafów	28
3	Wartości własne wybranych procesów narodzin i śmierci	30
3.1	Proste błądzenie losowe na $\mathbb{Z} \cap [0, N]$	30
3.1.1	Proste błądzenie losowe z ekranami odbijającymi	31
3.1.2	Proste błądzenie losowe z ekranami pochłaniającymi	32
3.1.3	Proste błądzenie losowe z ekranami elastycznymi	33
3.2	Model urnowy Ehrenfestów	36
3.3	Model urnowy Bernoulliego Laplace'a	37
3.4	Błądzenie po hiperkostce i dualny proces narodzin i śmierci	39
3.4.1	Nowy proces narodzin i śmierci	42
4	Podsumowanie	48
	Literatura	49

1 Wstęp

Procesy narodzin i śmierci z czasem dyskretnym są szczególną klasą łańcuchów Markowa z czasem dyskretnym określonych na ponumerowanej przestrzeni stanów, w których możliwe są przejścia wyłącznie pomiędzy sąsiednimi stanami. Gdy stan układu zwiększa się o jeden to mamy do czynienia z narodzinami, a gdy zmniejsza się o jeden ze śmiercią. Choć nazwa jest dość sugestywna i dobrze oddaje charakter tychże procesów, to sam stan układu nie musi koniecznie oznaczać liczności pewnej populacji. Procesy narodzin i śmierci poza naturalnym zastosowaniem w naukach biologicznych są również wykorzystywane w teorii systemów kolejkowych, a także między innymi do modelowania procesów fizycznych i błędzeń przypadkowych.

W niniejszej pracy skupimy się na procesach określonych na skończonej przestrzeni stanów i jednorodnych w czasie, które to opisane są przy pomocy macierzy przejść w jednym kroku. Wprowadzimy niezbędne pojęcia dotyczące teorii wartości i wektorów własnych, a także ich zastosowanie w analizie istotnych własności łańcuchów Markowa. Zaprezentujemy stochastyczną interpretację wartości własnych poprzez ich związek z tempem zbieżności do stacjonarności nieokresowych i nieredukowalnych procesów narodzin i śmierci. Podamy także związek wartości i wektorów własnych z rozkładem prawdopodobieństwa warunkowego przejść pomiędzy stanami w n krokach.

Następnie, przedstawimy kilka klasycznych i dobrze znanych przykładów procesów narodzin i śmierci takich jak poste błędzenie losowe w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$, proces urnowy Ehrenfestów, a także proces urnowy Bernoulliego Laplace'a. Wyliczymy analitycznie ich wartości własne, a w przypadku procesu prostego błędzenia losowego z ekranami elastycznymi w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ także wektory własne. Posłużymy się własnościami macierzy Toeplitza, macierzy Kaca, a także macierzy sąsiedztwa grafu hiperkostki, które to okażą się ściśle powiązane z rozważanymi procesami narodzin i śmierci.

W głównej części pracy wykorzystamy teorię łańcuchów Strong Stationary Dual do wyznaczenia wartości własnych pewnego zupełnie nowego procesu narodzin i śmierci \mathbf{X}^* . W tym celu policzymy wartości własne procesu \mathbf{X} błędzenia losowego po hiperkostce, który nie jest procesem narodzin i śmierci, a następnie udowodnimy, że procesy \mathbf{X}^* , \mathbf{X} mają takie same wartości własne.

Praca ta będzie więc ilustracją zastosowań algebry liniowej, głównie teorii wartości i wektorów własnych, w rachunku prawdopodobieństwa.

2 Wprowadzenie teoretyczne

2.1 Wartości i wektory własne

Definicja 2.1. Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$. Wielomianem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} nazywamy wielomian n -tego stopnia określony wzorem

$$\mathcal{W}_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}), \quad (1)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową stopnia n . Ponadto, równaniem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} nazywamy równanie następującej postaci

$$\mathcal{W}_A(\lambda) = 0. \quad (2)$$

Definicja 2.2. Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$.

1. Wartością własną macierzy \mathbf{A} nazywamy każdą liczbę λ będącą rozwiązaniem równania charakterystycznego tej macierzy.
2. Wektor $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \vec{0}$ nazywamy wektorem własnym macierzy \mathbf{A} stowarzyszonym z wartością własną λ , jeśli spełniony jest następujący warunek

$$\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x}. \quad (3)$$

3. Wektor $\vec{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n] \neq \vec{0}$ nazywamy lewostronnym wektorem własnym macierzy \mathbf{A} stowarzyszonym z wartością własną λ , jeśli spełniony jest następujący warunek

$$\vec{f} \mathbf{A} = \lambda \vec{f}. \quad (4)$$

Każda macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$ posiada więc n wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnych). Niech \vec{x}_i będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_i , wtedy \vec{x}_i jest liniowo niezależny od wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym różnym od λ_i . Zatem, jeśli wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są różne, to odpowiadające im wektory własne $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tworzą zbiór liniowo niezależny.

Definicja 2.3. Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$. Ponadto, niech λ_i będzie wartością własną macierzy \mathbf{A} stowarzyszoną z wektorem własnym \vec{x}_i , $i = 1, \dots, n$. Mówimy, że \mathbf{A} jest diagonalizowalna, gdy można ją przedstawić w postaci iloczynu

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}, \quad (5)$$

gdzie \mathbf{D} jest macierzą diagonalną z wartościami własnymi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na głównej przekątnej, a i -ta kolumna macierzy \mathbf{P} jest wektorem własnym \vec{x}_i stowarzyszonym z wartością własną λ_i .

Zauważmy, że gdy wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ macierzy \mathbf{A} są różne to macierz \mathbf{P} jest odwracalna. Stąd macierz \mathbf{A} jest diagonalizowalna gdy jej wszystkie wartości własne są różne. Możliwość przedstawienia macierzy kwadratowej \mathbf{A} w postaci (5) jest bardzo przydatna, gdy chcemy podnieść ją do pewnej potęgi. Jeśli $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, to $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$ oraz poprzez indukcję otrzymujemy, że $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}. \quad (6)$$

Twierdzenie 2.1. *Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wtedy $\forall k \in \mathbb{N}$*

$$\text{tr}(\mathbf{A}^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad (7)$$

gdzie $\text{tr}(\mathbf{A})$ oznacza ślad macierzy \mathbf{A} .

Dowód Twierdzenia 2.1.

Niech \mathbf{B} oraz \mathbf{C} będą macierzami kwadratowymi stopnia $n \geq 1$. Wtedy

$$\text{tr}(\mathbf{CB}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{CB})(i, i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{C}(i, j)\mathbf{B}(j, i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{B}(j, i)\mathbf{C}(i, j) = \sum_{j=1}^n \mathbf{BC}(j, j) = \text{tr}(\mathbf{BC}).$$

Zatem, zakładając, że macierz \mathbf{A} można przedstawić w postaci (5) otrzymujemy

$$\text{tr}(\mathbf{A}^k) = \text{tr}(\mathbf{P}(\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1})) = \text{tr}(\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{D}^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

□

Definicja 2.4. *Macierz kwadratową \mathbf{A} nazywamy regularną jeśli istnieje $k \in \mathbb{Z}^+$ takie, że macierz \mathbf{A}^k ma wszystkie wyrazy dodatnie.*

Dowód następującego twierdzenia można znaleźć w [2].

Twierdzenie 2.2. *(Perron-Frobenius) Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Jeśli \mathbf{A} jest regularna, wtedy*

1. $|\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 2, \dots, n,$
2. $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+,$
3. wektor własny \vec{x}_1 odpowiadający wartości własnej λ_1 ma wszystkie składowe ściśle dodatnie i jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej przez którą może zostać pomnożony.

Twierdzenie 2.3. Niech \mathbf{A} będzie macierzą kwadratową oraz niech λ będzie wartością własną macierzy \mathbf{A} . Wtedy $\alpha\lambda$ jest wartością własną macierzy $\alpha\mathbf{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dowód Twierdzenia 2.3.

Niech $\vec{x} \neq \vec{0}$ będzie wektorem własnym macierzy \mathbf{A} stowarzyszonym z wartością własną λ . Wtedy

$$(\alpha\mathbf{A})\vec{x} = \alpha(\mathbf{A}\vec{x}) = \alpha(\lambda\vec{x}) = (\alpha\lambda)\vec{x}.$$

Stąd $\vec{x} \neq \vec{0}$ jest wektorem własnym macierzy $\alpha\mathbf{A}$ stowarzyszonym z wartością własną $\alpha\lambda$. \square

Twierdzenie 2.4. Niech \mathbf{A} będzie macierzą kwadratową stopnia $n \in \mathbb{N}$ oraz niech λ będzie wartością własną macierzy \mathbf{A} . Wtedy $\alpha\lambda + \beta$ jest wartością własną macierzy $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową stopnia n oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dowód Twierdzenia 2.4.

Niech $\vec{x} \neq \vec{0}$ będzie wektorem własnym macierzy \mathbf{A} stowarzyszonym z wartością własną λ . Wtedy

$$(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I})\vec{x} = (\alpha\mathbf{A})\vec{x} + (\beta\mathbf{I})\vec{x} = \alpha(\mathbf{A}\vec{x}) + \beta(\mathbf{I}\vec{x}) = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\vec{x} = (\alpha\lambda + \beta)\vec{x}.$$

Stąd $\vec{x} \neq \vec{0}$ jest wektorem własnym macierzy $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I}$ stowarzyszonym z wartością własną $\alpha\lambda + \beta$. \square

Twierdzenie 2.5. Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wektorami własnymi $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ i lewostronnymi wektorami własnymi $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Jeśli macierz \mathbf{A} jest symetryczna, to $\vec{x}_i^T = \vec{f}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dowód Twierdzenia 2.5.

Jeśli λ_i jest wartością własną macierzy \mathbf{A} stowarzyszoną z wektorem własnym \vec{x}_i , to

$$\mathbf{A}\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i.$$

Stąd, transponując obie strony powyższego równania otrzymujemy

$$(\mathbf{A}\vec{x}_i)^T = \vec{x}_i^T\mathbf{A}^T = \vec{x}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i\vec{x}_i^T.$$

Zatem \vec{x}_i^T jest lewostronnym wektorem własnym macierzy \mathbf{A} stowarzyszonym z wartością własną λ_i . \square

2.1.1 Reprezentacja spektralna

Niech dana będzie macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia $n \geq 1$. Ponadto, niech λ_i oznacza wartość własną macierzy \mathbf{A} stowarzyszoną z wektorem własnym $\vec{x}_i = [x_i(1), \dots, x_i(n)]^T$ oraz z lewostronnym wektorem własnym $\vec{f}_i = [f_i(1), \dots, f_i(n)]$, $i = 1, \dots, n$. Załóżmy, że macierz \mathbf{A} jest diagonalizowalna. Wówczas, macierz \mathbf{A} może być wyrażona jako iloczyn $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1(n) & \dots & x_n(n) \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} f_1(1) & \dots & f_1(n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_n(1) & \dots & f_n(n) \end{bmatrix}.$$

Ponadto, $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową odpowiednich wymiarów. Stąd

$$\vec{f}_j \vec{x}_k = \sum_i f_j(i) x_k(i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq k, \\ 1, & \text{gdy } j = k. \end{cases} \quad (8)$$

Niech \mathbf{B}_k będzie macierzą powstałą poprzez wymnożenie wektora własnego \vec{x}_k przez lewostronny wektor własny \vec{f}_k

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} x_k(1) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k(1), & \dots, & f_k(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k(1)f_k(1) & \dots & x_k(1)f_k(n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_k(n)f_k(1) & \dots & x_k(n)f_k(n) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Z równania (8) wynika, że

$$\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k = \vec{x}_j \vec{f}_j \vec{x}_k \vec{f}_k = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq k, \\ \mathbf{B}_j, & \text{gdy } j = k. \end{cases} \quad (10)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(1, j) \mathbf{D}(j, i) \right) \mathbf{P}^{-1}(i, 1) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(1, j) \mathbf{D}(j, i) \right) \mathbf{P}^{-1}(i, n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(n, j) \mathbf{D}(j, i) \right) \mathbf{P}^{-1}(i, 1) & \dots & \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(n, j) \mathbf{D}(j, i) \right) \mathbf{P}^{-1}(i, n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(1, i) \mathbf{D}(i, i) \mathbf{P}^{-1}(i, 1) & \dots & \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(1, i) \mathbf{D}(i, i) \mathbf{P}^{-1}(i, n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(n, i) \mathbf{D}(i, i) \mathbf{P}^{-1}(i, 1) & \dots & \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(n, i) \mathbf{D}(i, i) \mathbf{P}^{-1}(i, n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(1) f_i(1) & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(1) f_i(n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(n) f_i(1) & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(n) f_i(n) \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{B}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{B}_n. \end{aligned}$$

Przedstawienie macierzy \mathbf{A} w postaci sumy

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{B}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{B}_n \quad (11)$$

nazywamy reprezentacją spektralną. Ponadto, z własności (10) otrzymujemy, że $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{A}^k = (\lambda_1 \mathbf{B}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{B}_n)^k = \lambda_1^k \mathbf{B}_1 + \dots + \lambda_n^k \mathbf{B}_n. \quad (12)$$

2.1.2 Trójdzielne macierze Toeplitza

Definicja 2.5. *Macierz Toeplitza to macierz kwadratowa mająca takie same wartości na poszczególnych przekątnych, to jest macierz postaci*

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} & a_{2n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, każda macierz kwadratowa stopnia $n \in \mathbb{N}$ posiada $2n - 1$ przekątnych, dlatego przy pomocy $2n - 1$ wartości a_1, \dots, a_{2n-1} jesteśmy w stanie opisać macierz Toeplitza stopnia n . Przyjmujemy ponadto konwencję, zgodnie z którą

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n-1}) = \begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} & a_{2n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Udowodniono [15], że każda macierz kwadratowa stopnia n może zostać przedstawiona jako iloczyn r macierzy Toeplitza, gdzie $r \leq 4\lfloor n/2 \rfloor + 5$.

Definicja 2.6. *Macierz wstęgowa to kwadratowa macierz rzadka, której wszystkie elementy są zerowe poza diagonalą i wstęgą złożoną z przekątnych wokół niej. Mając daną macierz kwadratową stopnia $n \in \mathbb{N}$, jej elementy $a_{i,j}$ są zerowe gdy $j < i - k_1$ lub $j > i + k_2$, gdzie $k_1, k_2 \geq 0$ determinują szerokość wstęgi.*

Szczególnym przykładem macierzy wstęgowej jest macierz trójdzielna, czyli macierz wstęgowa, dla której $k_1 = k_2 = 1$.

Definicja 2.7. Trójdzielna macierz Toeplitza stopnia $n \in \mathbb{N}$ to macierz następującej postaci

$$T_n(a, b, c) = \begin{bmatrix} b & c & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ 0 & & a & b \end{bmatrix}.$$

Trójdzielne macierze Toeplitza są szczególnie interesujące, bo są one jednymi z nielicznych nietrywialnych struktur, dla których jesteśmy w stanie wyznaczyć analitycznie wzory na ich wartości i wektory własne.

Twierdzenie 2.6. Wartości własne trójdzielnej macierzy Toeplitza $T_n(a, b, c)$ są postaci

$$\lambda_i = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}} \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Ponadto, wektor własny \vec{x}_i stowarzyszony z wartością własną $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ jest postaci

$$\vec{x}_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1i\pi}{n+1}\right) \\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{2}} \sin\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{k}{2}} \sin\left(\frac{ki\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{ni\pi}{n+1}\right) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Pomysł poniższego dowodu został zaczerpnięty z [14], Przykład 7.2.5.

Dowód Twierdzenia 2.6.

Niech λ będzie wartością własną macierzy $T_n(a, b, c)$, $ac \neq 0$ stowarzyszoną z wektorem własnym $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Wtedy, dla pary (λ, \vec{x}) spełniony jest układ złożony z n równań liniowych

$$(T_n(a, b, c) - \lambda \mathbf{I}) \vec{x} = 0 \iff \begin{cases} ax_{k-1} + (b - \lambda)x_k + cx_{k+1} = 0 & k = 1, \dots, n, \\ x_0 = x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Stąd, dzieląc przez c i podstawiając $k := k + 1$, otrzymujemy jednorodne równanie różnicowe drugiego stopnia o stałych współczynnikach, wraz z warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} x_{k+2} + \frac{b-\lambda}{c}x_{k+1} + \frac{a}{c}x_k = 0, & k = 0, \dots, n-1, \\ x_0 = x_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Rozwiązania równania (15) poszukujemy wśród funkcji potęgowej postaci $x_k = \alpha r^k$, gdzie $\alpha, r \in \mathbb{C}$ są pewnymi stałymi. Podstawiając tak określone rozwiązanie do równania (15) i dzieląc przez αr^k otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + \frac{b-\lambda}{c}r + \frac{a}{c} = (r-r_1)(r-r_2) = 0, \text{ gdzie } r_1, r_2 \in \mathbb{C}.$$

Wtedy, ogólne rozwiązanie rozważanego układu jest postaci

$$x_k = \begin{cases} \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k, & \text{gdzie } r_1 \neq r_2, \\ \alpha_1 r_0^k + \alpha_2 k r_0^k, & \text{gdzie } r_1 = r_2 = r_0, \end{cases} \quad (16)$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ są dowolnymi stałymi. Zauważmy ponadto, że r_1 oraz r_2 muszą być różne. W przeciwnym przypadku $x_k = \alpha_1 r_0^k + \alpha_2 k r_0^k$ wraz z warunkami brzegowymi $x_0 = x_{n+1} = 0$ implikuje $x_k = 0$, $k = 1, \dots, n$ co nie jest możliwe, gdyż \vec{x} jest wektorem własnym macierzy $T_n(a, b, c)$, zatem $\vec{x} \neq \vec{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k \\ x_0 = x_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 r_1^{n+1} + \alpha_2 r_2^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1, \quad (17)$$

zatem $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi il}{n+1}}$ dla pewnego $l \in \mathbb{N} \cap [0, n+1]$. Ponadto

$$r^2 + \frac{b-\lambda}{c}r + \frac{a}{c} = (r-r_1)(r-r_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b-\lambda}{a}, \\ r_1 r_2 = \frac{a}{c}. \end{cases}$$

Mamy więc układ, z którego możemy wyznaczyć r_1 oraz r_2

$$\begin{cases} r_1 = r_2 e^{\frac{2\pi il}{n+1}} \\ r_1 r_2 = \frac{a}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 e^{\frac{2\pi il}{n+1}} \\ r_2^2 = \frac{a}{c} e^{\frac{-2\pi il}{n+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} e^{\frac{\pi il}{n+1}}, \\ r_2 = \sqrt{\frac{a}{c}} e^{\frac{-\pi il}{n+1}}. \end{cases} \quad (18)$$

Podstawiając (18) do równania $r_1 + r_2 = -\frac{b-\lambda}{a}$ otrzymamy

$$r_1 + r_2 = \sqrt{\frac{a}{c}} \left(e^{\frac{\pi il}{n+1}} + e^{\frac{-\pi il}{n+1}} \right) = -\frac{b-\lambda}{a}.$$

Korzystając z tożsamości $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$

$$\sqrt{\frac{a}{c}} \left(\cos \left(\frac{\pi l}{n+1} \right) + i \sin \left(\frac{\pi l}{n+1} \right) + \cos \left(\frac{-\pi l}{n+1} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi l}{n+1} \right) \right) = -\frac{b-\lambda}{a}.$$

Ze względu na parzystość cosinusa i nieparzystość sinusa otrzymujemy

$$2\sqrt{\frac{a}{c}} \cos \left(\frac{\pi l}{n+1} \right) = -\frac{b-\lambda}{a} \Rightarrow \lambda = b + 2a\sqrt{\frac{a}{c}} \cos \left(\frac{\pi l}{n+1} \right).$$

Dlatego, wartości własne trójdzielnej macierzy Toeplitza $T_n(a, b, c)$ muszą być postaci

$$\lambda_i = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}} \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right), i = 1, \dots, n,$$

co kończy dowód pierwszej części Twierdzenia 2.6. Wszystkie wartości własne $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ macierzy $T_n(a, b, c)$ są różne, ponieważ $\cos(\theta)$ jest funkcją ściśle malejącą θ na odcinku $(0, \pi)$ oraz $ac \neq 0$, dlatego $T_n(a, b, c)$ jest diagonalizowalna. Zauważmy ponadto, że z równania (17) wynika, że k -ty element wektora własnego stowarzyszonego z wartością własną λ_j wyrażony jest wzorem $x_k = \alpha (r_1^k - r_2^k)$, gdzie r_1, r_2 są takie jak w (18). Stąd

$$r_k = \alpha \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{k}{2}} \left(e^{\frac{\pi i k j}{n+1}} - e^{-\frac{\pi i k j}{n+1}} \right) = 2i\alpha \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{k}{2}} \sin \left(\frac{\pi k j}{n+1} \right), \text{ dla pewnego } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Położmy $\alpha = -\frac{1}{2}i$, wtedy otrzymujemy, że wektor własny trójdiagonalnej macierzy Toeplitza $T_n(a, b, c)$ stowarzyszony z wartością własną $\lambda_i, i = 1 \dots, n$ jest postaci

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{1i\pi}{n+1} \right) \\ \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{2}{2}} \sin \left(\frac{2i\pi}{n+1} \right) \\ \vdots \\ \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{k}{2}} \sin \left(\frac{ki\pi}{n+1} \right) \\ \vdots \\ \left(\frac{a}{c} \right)^{\frac{n}{2}} \sin \left(\frac{ni\pi}{n+1} \right) \end{bmatrix},$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.7. Niech dana będzie trójdiagonalna macierz Toeplitza $T_n(a, b, c)$, $ac \neq 0$ stopnia $n \geq 1$, wówczas zachodzi związek rekurencyjny

$$\begin{cases} \det T_{-1}(a, b, c) = 0, \\ \det T_0(a, b, c) = 1, \\ \det T_n(a, b, c) = b \det T_{n-1}(a, b, c) - ac \det T_{n-2}(a, b, c), n \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Dowód Twierdzenia 2.7.

Rozważmy trzy przypadki, gdy $n = 1, n = 2$ lub $n \geq 3$. Na potrzeby tego dowodu przyjmijmy także konwencję, zgodnie z którą $\det T_n(a, b, c) \equiv \mathcal{T}_n$.

Dla $n = 1$

Mamy $T_1(a, b, c) = [b]$, stąd $\mathcal{T}_1 = b$. Ponadto, na mocy Twierdzenia 2.7 $\mathcal{T}_1 = b\mathcal{T}_0 - ac\mathcal{T}_{-1} \iff b = b\mathcal{T}_0 - ac\mathcal{T}_{-1} \iff 0 = b(\mathcal{T}_0 - 1) - ac\mathcal{T}_{-1}$. Aby teza twierdzenia była spełniona dla $n = 1$ to $\mathcal{T}_0 = 1$, stąd $0 = ac\mathcal{T}_{-1}$, a ponieważ $ac \neq 0$, zatem $\mathcal{T}_{-1} = 0$.

Dla $n = 2$

Mamy $T_2(a, b, c) = \begin{bmatrix} b & c \\ a & b \end{bmatrix}$, stąd $\mathcal{T}_2 = b^2 - ac$. Ponadto, na mocy Twierdzenia 2.7 $\mathcal{T}_2 =$

$b\mathcal{T}_1 - ac\mathcal{T}_0$. Wiadomo także, że $\mathcal{T}_1 = b$, stąd $b^2 - ac = b^2 - ac\mathcal{T}_0 \iff 0 = ac(\mathcal{T}_0 - 1)$, a ponieważ $ac \neq 0$ zatem $\mathcal{T}_0 = 1$.

Dla $n \geq 3$

Teza twierdzenia wynika wprost z rozwinięcia Laplace'a $T_n(a, b, c)$ względem pierwszego wiersza.

□

2.1.3 Trójdiagonalne pseudo macierze Toeplitza

Praca ta poświęcona jest wartościom własnym procesów narodzin i śmierci. Procesy te opisane są przy pomocy macierzy stochastycznych. Z tego powodu teoria dotycząca trójdiagonalnych macierzy Toeplitza $T_n(a, b, c)$, $ac \neq 0$ nie ma tu bezpośredniego zastosowania. Niemniej, istnieje możliwość wykorzystania własności trójdiagonalnych pseudo macierzy Toeplitza.

Definicja 2.8. *Trójdiagonalna pseudo macierz Toeplitza $T_{n_1}^N(a, b, c)$, $ac \neq 0$ to kwadratowa macierz blokowa stopnia $N \geq 3$ postaci*

$$T_{n_1}^N(a, b, c) = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{n_2} & \bar{c} & \\ \hline a & T_{n_1}(a, b, c) & \\ \hline & & c \\ \hline & & \bar{a} & B_{n_3} \end{array} \right], \text{ gdzie}$$

$$A_{n_2} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n_2-1} \\ 0 & & a_{n_2} & b_{n_2} \end{bmatrix}, \quad B_{n_3} = \begin{bmatrix} b_{N+1-n_3} & c_{N+1-n_3} & & 0 \\ a_{N+2-n_3} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & & a_N & b_N \end{bmatrix},$$

oraz $N = n_1 + n_2 + n_3$.

Szczególnie interesujący jest dla nas przypadek gdy $n_2 = n_3 = 1$ oraz $A_1 = [a_1]$ i $B_1 = [b_N]$

$$T_n^{n+2}(a, b, c) = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \bar{c} & \\ \hline a & T_n(a, b, c) & c \\ \hline & & \bar{a} & b_N \end{array} \right]. \quad (20)$$

Twierdzenie 2.8. Niech dana będzie trójdzielna pseudo macierz Toeplitza stopnia $N = n + 2, n \geq 1$ postaci

$$T_n^{n+2}(a, b, c) = \left[\begin{array}{c|cc} b & c+a & \\ \hline a & T_n(a, b, c) & c \\ \hline & & a+c & b \end{array} \right],$$

oraz niech $a + b + c = 1$. Wtedy macierz $T_n^{n+2}(a, b, c)$ posiada $n + 2$ różne wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}$. Ponadto $\lambda_{n+1} = 1, \lambda_{n+2} = 2b - 1$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi trójdzielnej macierzy Toeplitza $T_n(a, b, c)$.

Dowód Twierdzenia 2.8.

Na potrzeby tego dowodu przyjmijmy następujące oznaczenie $\det(T_n(a, b - \lambda, c)) \equiv \mathcal{T}_n$, wówczas

$$\det(T_n^{n+2}(a, b, c) - \lambda \mathbf{I}) = \left| \begin{array}{c|cc} b - \lambda & c+a & \\ \hline a & T_n(a, b - \lambda, c) & c \\ \hline & & a+c & b - \lambda \end{array} \right| = 0$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza \Updownarrow

$$(b - \lambda) \left| \begin{array}{c|c} T_n(a, b - \lambda, c) & c \\ \hline a+c & b - \lambda \end{array} \right| - a(a+c) \left| \begin{array}{c|c} T_{n-1}(a, b - \lambda, c) & c \\ \hline a+c & b - \lambda \end{array} \right| = 0$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza \Updownarrow

$$\begin{aligned} (b - \lambda)^2 \mathcal{T}_n - c(b - \lambda)(a+c) \mathcal{T}_{n-1} - a(b - \lambda)(a+c) \mathcal{T}_{n-1} + ac(a+c)^2 \mathcal{T}_{n-2} &= 0 \\ \iff (b - \lambda)^2 \mathcal{T}_n - (b - \lambda)(a+c)^2 \mathcal{T}_{n-1} + ac(a+c)^2 \mathcal{T}_{n-2} &= 0 \\ \iff (b - \lambda)^2 \mathcal{T}_n - (a+c)^2 \underbrace{[(b - \lambda) \mathcal{T}_{n-1} - ac \mathcal{T}_{n-2}]}_{\mathcal{T}_n} &= 0 \\ \iff (b - \lambda)^2 \mathcal{T}_n - (a+c)^2 \mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n \left((b - \lambda)^2 - (a+c)^2 \right) &= 0 \\ \iff \mathcal{T}_n (b + a + c - \lambda)(b - a - c - \lambda) = \mathcal{T}_n (1 - \lambda) [(2b - 1) - \lambda] &= 0 \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.9. Niech dana będzie trójdzielna pseudo macierz Toeplitza stopnia $N = n + 2, n \geq 1$ postaci

$$T_n^{n+2}(a, b, c) = \left[\begin{array}{c|cc} b+a & c & \\ \hline a & T_n(a, b, c) & c \\ \hline & & a & b+c \end{array} \right],$$

oraz niech $a + b + c = 1$. Wtedy macierz $T_n^{n+2}(a, b, c)$ posiada $n + 2$ różne wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}$. Ponadto $\lambda_{n+2} = 1$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ są wartościami własnymi trójdzielnej macierzy Toeplitza $T_{n+1}(a, b, c)$.

Dowód Twierdzenia 2.9.

Na potrzeby dowodu przyjmijmy następujące oznaczenie $\det(T_n(a, b - \lambda, c)) \equiv \mathcal{T}_n$, wówczas

$$\det(T_n^{n+2}(a, b, c) - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} b+a-\lambda & c & & \\ a & T_n(a, b-\lambda, c) & c & \\ & & a & b+c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza \Updownarrow

$$(b+a-\lambda) \begin{vmatrix} T_n(a, b-\lambda, c) & c \\ a & b+c-\lambda \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} T_{n-1}(a, b-\lambda, c) & c \\ a & b+c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza \Updownarrow

$$(b+a-\lambda)(b+c-\lambda)\mathcal{T}_n - ac(b+a-\lambda)\mathcal{T}_{n-1} - ac(b+c-\lambda)\mathcal{T}_{n-1} + a^2c^2\mathcal{T}_{n-2} = 0$$

$$\iff (b+a-\lambda)(b+c-\lambda)\mathcal{T}_n - ac(1+b-2\lambda)\mathcal{T}_{n-1} + a^2c^2\mathcal{T}_{n-2} = 0$$

Podstawiając $ac\mathcal{T}_{n-2} = (b-\lambda)\mathcal{T}_{n-1} - \mathcal{T}_n$ \Updownarrow

$$[b(1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)]\mathcal{T}_n - ac(1-\lambda)\mathcal{T}_{n-1} = (1-\lambda)(b-\lambda)\mathcal{T}_n - ac(1-\lambda)\mathcal{T}_{n-1} = 0$$

Wprost z Twierdzenia 2.7 \Updownarrow

$$(1-\lambda)\mathcal{T}_{n+1} = 0$$

□

2.1.4 Macierz Kaca

Definicja 2.9. Macierz Kaca stopnia $N \in \mathbb{N}$ to macierz trójdzielna następującej postaci

$$K_N = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & N-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & N-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N & 0 \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1}$$

Suma poszczególnych wierszy macierzy Kaca K_N jest równa N , zatem macierz $\frac{1}{N}K_N$ jest macierzą stochastyczną. Ze względu na szczególną postać macierzy Kaca K_N , dla każdego $N \in \mathbb{N}$ jesteśmy w stanie analitycznie wyznaczyć jej wartości własne. Jak się później okaże, pomocna będzie poniższa własność macierzy klatkowych.

Twierdzenie 2.10. *Niech dana będzie następująca macierz klatkowa*

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ gdzie } A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}, B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}, C = [c_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}, D = [d_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$

Wówczas:

1. *Jeśli macierz C jest macierz zerową ($C = \mathbf{0}_{n \times k}$), to*

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D.$$

2. *Jeśli macierz B jest macierz zerową ($B = \mathbf{0}_{k \times n}$), to*

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det D.$$

Dowód Twierdzenia 2.10.

Niech I_N oznacza macierz jednostkową stopnia N . Zauważmy, że:

1.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

ponadto, stosując rozwinięcie Laplace'a kolejno względem pierwszych k i ostatnich n wierszy otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det D, \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det A.$$

2.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

ponadto, stosując rozwinięcie Laplace'a kolejno względem ostatnich n i pierwszych k wierszy otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{bmatrix} = \det A, \quad \det \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det D.$$

Wtedy na mocy twierdzenia Cauchy'ego o wyznacznikach otrzymujemy tezę Twierdzenia 2.10. \square

Twierdzenie 2.11. *Wartości własne macierzy Kaca K_N są postaci*

$$\lambda_k = N - 2k, \quad k = 0, \dots, N. \quad (21)$$

Udowodnimy powyższe twierdzenie wyznaczając miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego macierzy K_N .

Dowód Twierdzenia 2.11.

Na potrzeby tego dowodu przyjmijmy następujące oznaczenia dotyczące operacji elementarnych na wierszach i kolumnach:

- $w_i := w_i + w_j$ zamiana i -tego wiersza na sumę i -tego oraz j -tego wiersza,
- $k_i := k_i + k_j$ zamiana i -tej kolumny na sumę i -tej oraz j -tej kolumny.

Analogicznie dla różnicy wierszy i kolumn. Wówczas

$$\det(K_N - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & N-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & N-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Downarrow k_i := k_i + k_{i-2}, i = 3, \dots, N+1$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & N & -\lambda & N & \ddots & \ddots \\ 1 & -\lambda & N & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & N & -\lambda \\ \ddots & \ddots & \ddots & N-1 & -\lambda & N \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & N & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow w_i := w_i + w_{i+1}, i = 1, \dots, N$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & N - \lambda & N - \lambda & N - \lambda & \dots & N - \lambda & N - \lambda & N - \lambda \\ 1 & 2 - \lambda & N - \lambda & N - \lambda & \dots & N - \lambda & N - \lambda & N - \lambda \\ 0 & 2 & 3 - \lambda & N - \lambda & \dots & N - \lambda & N - \lambda & N - \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N - 1 & N - \lambda & N - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow w_i := w_i - w_{i+1}, i = 1, \dots, N - 1$$

$$\left| \begin{array}{c|c} K_{N-2} & \mathbf{0}_{N-1 \times 2} \\ \hline C & D \end{array} \right| = 0,$$

gdzie K_{N-2} jest macierzą Kaca stopnia $N - 2$, $\mathbf{0}_{N-1 \times 2}$ jest macierzą zerową odpowiednich wymiarów, $D = \begin{bmatrix} N-\lambda & N-\lambda \\ N & -\lambda \end{bmatrix}$ oraz $C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & N-1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

\Downarrow na mocy Twierdzenia 2.10 prawdziwa jest następująca rekurencja

$$|K_{N-2}| \begin{vmatrix} N - \lambda & N - \lambda \\ N & -\lambda \end{vmatrix} = (N + \lambda)(N - \lambda) |K_{N-2}| = 0,$$

wraz z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} |K_0| = -\lambda, \\ |K_1| = (1 - \lambda)(1 + \lambda). \end{cases}$$

Co kończy dowód. □

2.2 Łańcuchy Markowa z czasem dyskretnym

Definicja 2.10. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, (E, \mathcal{E}) będzie przestrzenią mierzalną, zaś T dowolnym podzbiorem liczb naturalnych. Procesem stochastycznym z czasem dyskretnym o wartościach w E , określonym na zbiorze T nazywamy ciąg zmiennych losowych $\mathbf{X} = \{X_t, t \in T\}$ przyjmujących wartości w zbiorze E .

Indeks t ma zazwyczaj znaczenie czasu. Stąd, jeśli zachodzi zdarzenie $\{X_t = i\}$, to mówimy, że proces znajduje się w chwili t w stanie $i \in E$, a zbiór wartości E procesu nazywamy przestrzenią stanów.

Uwaga 2.1. Od tego momentu pisząc proces stochastyczny będziemy mieli na myśli proces z czasem dyskretnym.

Definicja 2.11. Proces stochastyczny $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ nazywamy jednorodnym łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym określonym na skończonej przestrzeni stanów E , jeśli $\forall i_0, \dots, i_n, i, j \in E$ oraz $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}. \quad (22)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}$ nazywamy prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j w jednym kroku.

Definicja 2.12. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na ponumerowanej przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \dots, n\}$. Macierz \mathbf{P} postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

nazywamy macierzą prawdopodobieństw przejść w jednym kroku.

Zauważmy, że ponieważ P_{ij} są prawdopodobieństwami, a łańcuch Markowa musi w każdej chwili znajdować się w pewnym stanie, więc \mathbf{P} jest macierzą stochastyczną, to znaczy $\forall i, j \in E P_{ij} \geq 0$ oraz $\forall i \in E \sum_{j \in E} P_{ij} = 1$.

Uwaga 2.2. Od tego momentu pisząc łańcuch Markowa będziemy mieli na myśli jednorodny łańcuch Markowa z czasem dyskretnym określony na skończonej przestrzeni stanów.

Definicja 2.13. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E . Wówczas $\forall n, m \in \mathbb{N}$ oraz $\forall i, j \in E$ prawdopodobieństwo warunkowe postaci

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = P_{ij}(m), \quad (24)$$

nazywamy prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j w m krokach.

Twierdzenie 2.12. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E . Dla $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $i, j \in E$ zachodzi równość

$$P_{ij}(m+n) = \sum_{k \in E} P_{ik}(n)P_{kj}(m). \quad (25)$$

Własność (25) nazywamy równaniem Chapmana-Kołmogorowa.

Dowód Twierdzenia 2.12.

Rozważmy prawdopodobieństwo warunkowe po lewej stronie równania (25)

$$\begin{aligned} P_{ij}(m+n) &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in E} P(X_{m+n} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{m+n} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{m+n} = j | X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i) = \sum_{k \in E} P_{ik}(n) P_{kj}(m). \end{aligned}$$

□

Macierz \mathbf{P}^n utworzoną z prawdopodobieństw $P_{ij}(n)$ nazywamy macierzą prawdopodobieństw przejść w n krokach. Zauważmy, że równość (25) w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \mathbf{P}^m. \quad (26)$$

Definicja 2.14. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E . Rozkład prawdopodobieństwa $P(X_0 = i) = \nu(i)$, $i \in E$ taki, że $\forall i \in E \nu(i) \geq 0$ oraz $\sum_{k \in E} \nu(k) = 1$ nazywamy rozkładem początkowym łańcucha Markowa.

Znając początkowy rozkład prawdopodobieństwa ν łańcucha Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ z przestrzenią stanów E i macierzą przejść \mathbf{P} możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia $\{X_n = j\}$

$$P(X_n = j) = \sum_{k \in E} P(X_n = j | X_0 = k) = \sum_{k \in E} P_{kj}(n) \nu(k). \quad (27)$$

Definicja 2.15. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E z macierzą przejść \mathbf{P} . Mówimy, że stany $i, j \in E$ komunikują się ze sobą i oznaczamy $i \leftrightarrow j$ jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) > 0 \text{ oraz } P(X_{m+n} = i | X_m = j) > 0. \quad (28)$$

W zapisie macierzowym oznacza to tyle, że

$$\mathbf{P}^n(j, i) > 0 \text{ oraz } \mathbf{P}^n(i, j) > 0, \quad (29)$$

dla pewnego n .

Definicja 2.16. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E . Mówimy, że \mathbf{X} jest nieredukowalny jeśli $\forall i, i \in E \ i \leftrightarrow j$.

Nietrudno zauważyć, że łańcuch Markowa z macierzą przejść \mathbf{P} jest nieredukowalny jeśli macierz \mathbf{P} jest regularna.

Definicja 2.17. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E . Okresem stanu $i \in E$ nazywamy liczbę

$$o_i = \text{NWD} \{n : \mathbf{P}^n(i, i) > 0\}, \quad (30)$$

gdzie $\text{NWD}(\mathcal{A})$ oznacza największy wspólny dzielnik zbioru \mathcal{A} . Ponadto, stan i nazywamy okresowym gdy $o_i > 1$ lub nieokresowym, gdy $o_i = 1$.

Dodatkowo, łańcuch Markowa nazywamy nieokresowym, gdy wszystkie jego stany są nieokresowe. Można także pokazać [2], że jeśli łańcuch Markowa jest nieredukowalny to jego wszystkie stany mają taki sam okres.

Definicja 2.18. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów $E = \{1, \dots, n\}$ z macierzą przejść \mathbf{P} . Wektor $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ nazywamy rozkładem stacjonarnym łańcucha \mathbf{X} jeśli spełnione są następujące warunki

1. $\forall i \in E \ \pi_i \geq 0$,
2. $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$,
3. $\pi \mathbf{P} = \pi$.

2.2.1 Tempo zbieżności ergodycznych łańcuchów Markowa do stacjonarności

Twierdzenie 2.13. *Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów E z macierzą przejść \mathbf{P} , rozkładem stacjonarnym π i wartościami własnymi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Jeśli \mathbf{X} jest nieredukowalny i nieokresowy, wtedy $\forall i, j \in E$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k(i, j) = \pi(j) > 0, \quad (31)$$

rozkład stacjonarny π jest określony jednoznacznie oraz łańcuch \mathbf{X} nazywamy ergodycznym. Dodatkowo, prędkość zbieżności wyrażenia (31) do granicy jest geometryczna. Istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że

$$|\mathbf{P}^k(i, j) - \pi(j)| \leq \alpha |\lambda_2|^k, k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Dowód powyższego twierdzenia, a także wiele więcej możemy znaleźć w [2]. Zauważmy, że dla łańcucha Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określonego na przestrzeni stanów $E = \{1, \dots, n\}$ z macierzą przejść \mathbf{P} i rozkładem początkowym ν , $\pi_k = \nu \mathbf{P}^k$ jest rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej X_n . Ponadto, jeśli \mathbf{X} jest nieredukowalny i nieokresowy, to istnieje jednoznacznie określony rozkład stacjonarny π łańcucha \mathbf{X} taki, że $\forall i \in E \pi(i) > 0$ oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(i) = \pi(i), \quad (33)$$

niezależnie od rozkładu początkowego ν .

Definicja 2.19. *Niech π_i, π_j będą rozkładami prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów E . Wówczas, definiujemy dwie główne miary odległości pomiędzy rozkładami*

1. Total variation distance

$$d(\pi_i, \pi_j) = \max_{A \subseteq E} |\pi_i(A) - \pi_j(A)|, \quad (34)$$

$$\text{gdzie } \pi_i(A) = \sum_{k \in A} \pi_i(k).$$

2. Separation distance

$$s(\pi_i, \pi_j) = \sup_{k \in E} \left(1 - \frac{\pi_i(k)}{\pi_j(k)} \right). \quad (35)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} d(\pi_i, \pi_j) &= \max_{A \subseteq E} |\pi_i(A) - \pi_j(A)| = \max_{A \subseteq E} \left| \sum_{k \in A} (\pi_i(k) - \pi_j(k)) \right| = \sum_{k \in E: \pi_i(k) > \pi_j(k)} \pi_i(k) - \pi_j(k) \\ &= \sum_{k \in E: \pi_j(k) > \pi_i(k)} \pi_j(k) - \pi_i(k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in E} |\pi_i(k) - \pi_j(k)|. \end{aligned}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} d(\pi_i, \pi_j) &= \sum_{k \in E} (\pi_i(k) - \pi_j(k))_+ = \sum_{k \in E} \pi_i(k) \left(1 - \frac{\pi_j(k)}{\pi_i(k)}\right)_+ \\ &\leq \sum_{k \in E} \pi_i(k) \max_{l \in E} \left(1 - \frac{\pi_j(l)}{\pi_i(l)}\right) = s(\pi_i, \pi_j) \sum_{k \in E} \pi_i(k) = s(\pi_i, \pi_j), \end{aligned}$$

gdzie $(x)_+ = \max(0, x)$. Zatem $d(\pi_i, \pi_j) \leq s(\pi_i, \pi_j)$.

Definicja 2.20. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów $E = \{1, \dots, n\}$ z macierzą przejść \mathbf{P} i rozkładem początkowym ν . Ponadto, niech \mathbf{X} będzie nieredukowalny i nieokresowy z rozkładem stacjonarnym π . Wówczas, **Strong Stationary Time** jest czasem zatrzymania T łańcucha \mathbf{X} takim, że zmienna losowa X_T ma rozkład stacjonarny π i jest niezależna od T .

Następujące twierdzenie zostało udowodnione w [1].

Twierdzenie 2.14. Niech dany będzie nieredukowalny i nieokresowy łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ określony na przestrzeni stanów $E = \{1, \dots, n\}$ z macierzą przejść \mathbf{P} , rozkładem początkowym ν i rozkładem stacjonarnym π . Ponadto, niech $\pi_k = \nu \mathbf{P}^k$. Wówczas

1. Jeśli T jest Strong Stationary Time wtedy $\forall n \in \mathbb{N}$

$$s(\pi_n, \pi) \leq P(T > n). \quad (36)$$

2. Jednocześnie istnieje Strong Stationary Time T taki, że w (36) zachodzi równość, a takie T nazywamy **czasem do stacjonarności**.

2.2.2 Procesy narodzin i śmierci z czasem dyskretnym

Definicja 2.21. Niech dany będzie łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ z czasem dyskretnym określony na skończonej przestrzeni stanów E z macierzą przejść $\mathbf{P} = [P_{ij}]_{i,j \in E}$. Wówczas \mathbf{X} jest procesem narodzin i śmierci z czasem dyskretnym, jeśli $\forall i, j \in E$

$$P_{i,j} = \begin{cases} p_i, & \text{gdy } j = i + 1, \\ q_i, & \text{gdy } j = i - 1, \\ 1 - q_i - p_i, & \text{gdy } j = i, \\ 0, & \text{gdy } |j - i| \geq 2, \end{cases} \quad (37)$$

gdzie $\forall i \in E$ $p_i, q_i \geq 0$ oraz $p_i + q_i \leq 1$.

Procesy narodzin i śmierci są więc szczególnymi przypadkami łańcuchów Markowa, w których możliwe są wyłącznie przejścia między sąsiednimi stanami. Łańcuchy narodzin i śmierci są często używane do modelowania zmian liczebności pewnej populacji w czasie przy założeniu, że liczebność populacji w jednym kroku może zwiększyć lub zmniejszyć się o jeden albo pozostać bez zmian. Stąd p_i oraz q_i nazywamy odpowiednio intensywnością narodzin i intensywnością śmierci.

Uwaga 2.3. *Macierz przejść procesu narodzin i śmierci jest macierzą trójdziagonalną.*

Można pokazać [3], że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.15. *Niech $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ będzie nieredukowalnym procesem narodzin i śmierci określonym na przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \dots, n\}$ z macierzą przejść \mathbf{P} startującym z zera ($\nu(0) = 1$). Ponadto, niech $\forall i < n$ $p_i + q_{i+1} \leq 1$. Wtedy, macierz \mathbf{P} ma $n + 1$ różnych wartości własnych $1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ takich, że $-1 < \lambda_i < 1$ dla $i = 1, \dots, n$, a funkcja tworząca prawdopodobieństwa czasu do stacjonarności jest następującej postaci*

$$\mathcal{G}(u) = \prod_{i=1}^n \frac{(1 - \lambda_i)u}{1 - \lambda_i u}. \quad (38)$$

Jeśli wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są nieujemne, wtedy czas do stacjonarności ma rozkład sumy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym z prawdopodobieństwami sukcesu $1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n$.

2.2.3 Wartości własne dualnych łańcuchów Markowa

Definicja 2.22. *Niech dany będzie ergodyczny łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, macierzą przejść \mathbf{P} i rozkładem początkowym ν . Ponadto, niech π będzie rozkładem stacjonarnym łańcucha \mathbf{X} . Niech $\mathbf{X}^* = \{X_t^*, t \geq 0\}$ będzie łańcuchem Markowa z rozkładem początkowym ν^* , przestrzenią stanów $E^* = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ i macierzą przejść \mathbf{P}^* takim, że stan \mathbf{e}_m^* jest pochłaniający. Co więcej, niech Λ będzie macierzą stochastyczną rozmiaru $n \times m$ taką, że $\Lambda(\mathbf{e}_m^*, \cdot) = \pi(\cdot)$. Mówimy, iż \mathbf{X}^* jest **Strong Stationary Dual** dla łańcucha \mathbf{X} z linkiem Λ , jeśli*

$$\begin{cases} \nu = \nu^* \Lambda, \\ \Lambda \mathbf{P} = \mathbf{P}^* \Lambda. \end{cases} \quad (39)$$

Łańcuchy dualne są stosowane głównie do badania prędkości zbieżności łańcuchów Markowa do stacjonarności. Jak bowiem udowodniono [3], jeśli łańcuch \mathbf{X}^* jest Strong Stationary Dual dla łańcucha \mathbf{X} oraz T^* jest czasem do pochłonięcia w \mathbf{X}^* , to T^* jest Strong Stationary Time dla

X. W niniejszej pracy podejmujemy tematykę wartości własnych procesów narodzin i śmierci. W tym kontekście zastosowanie łańcuchów dualnych będzie wynikało z następującego lematu.

Lemat 2.1. *Niech dany będzie ergodyczny łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i macierzą przejść \mathbf{P} . Ponadto, niech łańcuch Markowa $\mathbf{X}^* = \{\mathbf{X}_t^*, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $E^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_m^*\}$ i macierzą przejść \mathbf{P}^* będzie Strong Stationary Dual łańcucha \mathbf{X} . Wówczas, jeśli λ jest wartością własną macierzy \mathbf{P} , to jest też wartością własną macierzy \mathbf{P}^* .*

Dowód Lematu 2.1.

Łańcuchy Markowa \mathbf{X} oraz \mathbf{X}^* są Strong Stationary Dual zatem istnieje macierz Λ taka, że zachodzi równość (39). Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną macierzy \mathbf{P} stowarzyszoną z wektorem własnym $\vec{x} \neq \vec{0}$. Wtedy

$$\mathbf{P}\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Mnożąc obie strony równania (39) przez wektor \vec{x} otrzymujemy

$$(\Lambda\mathbf{P})\vec{x} = \Lambda(\underbrace{\mathbf{P}\vec{x}}_{\lambda\vec{x}}) = \lambda\Lambda\vec{x} = \mathbf{P}^*\Lambda\vec{x}.$$

Zatem λ jest wartością własną macierzy \mathbf{P}^* stowarzyszoną z wektorem własnym $\Lambda\vec{x}$. □

Definicja 2.23. *Niech dana będzie macierz prostokątna \mathbf{C} o wymiarach $m \times n$ oraz niech $n \neq m$ wtedy macierz \mathbf{C}^{-1} o wymiarach $n \times m$ taką, że*

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}_n,$$

gdzie \mathbf{I}_n jest macierzą jednostkową odpowiednich wymiarów, nazywamy lewostronną odwrotnością macierzy \mathbf{C} .

Definicja 2.24. *Niech \mathbf{A} będzie macierzą o wymiarach $n \times m$, wtedy jądrem \mathbf{A} nazywamy przestrzeń*

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{b} = \vec{0}\}.$$

Twierdzenie 2.16. *Niech dana będzie macierz prostokątna \mathbf{C} o wymiarach $m \times n$, $m \geq n$ oraz niech $\text{rank } \mathbf{C} = n$ wtedy istnieje lewostronna odwrotność macierzy \mathbf{C} .*

Dowód Twierdzenia 2.16.

Zauważmy, że jeśli macierz $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ jest odwracalna to

$$\underbrace{(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T}_{\mathbf{C}^{-1}}\mathbf{C} = \mathbf{I}_n,$$

gdzie \mathbf{I}_n jest macierzą jednostkową odpowiednich wymiarów. Stąd, jeśli $\det \mathbf{C}^T \mathbf{C} \neq 0$, to istnieje lewostronna odwrotność macierzy \mathbf{C} . Wystarczy więc udowodnić, że jeśli $\text{rank } \mathbf{C} = n$, to $\det \mathbf{C}^T \mathbf{C} \neq 0$. W tym celu pokażemy, że $\ker(\mathbf{C}) = \ker(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$. Ponieważ $\text{rank } \mathbf{C} = n$, to kolumny macierzy \mathbf{C} są liniowo niezależne, zatem $\ker(\mathbf{C}) = \vec{0}$. Załóżmy, że $\mathbf{a} \in \ker(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$, wtedy

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{a} = \vec{0} \iff \mathbf{a}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{a} = 0 \iff \|\mathbf{C} \mathbf{a}\|^2 = 0 \iff \mathbf{C} \mathbf{a} = \vec{0},$$

zatem $\mathbf{a} \in \ker(\mathbf{C})$, a ponieważ $\ker(\mathbf{C}) = \vec{0}$, więc $\ker(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) = \ker(\mathbf{C}) = \vec{0}$. Stąd, kolumny macierzy kwadratowej $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ są liniowo niezależne oraz $\det \mathbf{C}^T \mathbf{C} \neq 0$. \square

Twierdzenie 2.17. *Niech dany będzie ergodyczny łańcuch Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i macierzą przejść \mathbf{P} . Jeśli \mathbf{P} jest macierzą podwójnie stochastyczną to rozkład jednostajny $\pi(i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa z tą macierzą.*

Dowód Twierdzenia 2.17.

Wprost z definicji. Rozkład prawdopodobieństw $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$ na przestrzeni stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\pi \mathbf{P} = \pi.$$

Dla $\pi = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$, gdy macierz \mathbf{P} jest macierzą podwójnie stochastyczną mamy

$$\pi \mathbf{P} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{i1}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{in} \right] = \left[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right] = \pi.$$

\square

Definicja 2.25. *Niech dany będzie ergodyczny łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, macierzą przejść $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ i rozkładem stacjonarnym π . Wówczas, łańcuch \mathbf{X} jest odwracalny, gdy*

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad \pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}. \quad (40)$$

Ponadto, gdy spełniony jest warunek (40) to łańcuch Markowa $\overleftarrow{\mathbf{X}}$ z macierzą przejść

$$\overleftarrow{\mathbf{P}} = (\text{diag}(\pi))^{-1} \mathbf{P}^T (\text{diag}(\pi)), \quad (41)$$

gdzie $\text{diag}(\pi)$ jest macierzą diagonalną z wektorem π na głównej przekątnej, nazywamy łańcuchem Markowa odwróconym w czasie.

Jeśli macierz przejść \mathbf{P} ergodycznego łańcucha Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ jest symetryczna ($\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$), to jest podwójnie stochastyczna oraz na mocy Twierdzenia 2.17 rozkład stacjonarny π tego procesu jest jednostajny. Wtedy proces \mathbf{X} jest odwracalny oraz $\overleftarrow{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$. W praktyce, największym problemem okazuje się znalezienie dla danego łańcucha \mathbf{X} łańcucha dualnego \mathbf{X}^* , tj. przestrzeni E^* , rozkładu początkowego ν^* , linku Λ oraz macierzy przejść \mathbf{P}^* . Diaconis i Fill w [3] podają taki przepis tylko w sytuacji, gdy łańcuch odwrócony w czasie $\overleftarrow{\mathbf{X}}$ jest stochastycznie monotoniczny względem porządku liniowego. Lorek, Szekli w [11] formułują rozszerzenie takiego twierdzenia do przestrzeni częściowo uporządkowanej. Dokładniej, przy pewnym założeniu na łańcuch odwrócony w czasie (tzw. *monotoniczność Möbiusa*) pokazując konstrukcję łańcucha dualnego określonego na tej samej przestrzeni stanów $E^* = E$. Poniżej przedstawiamy uogólnienie tego twierdzenia na dowolną przestrzeń stanów E^* . Idea polega na wprowadzeniu, przy pomocy macierzy \mathbf{C}_0 , "porządku" pomiędzy dwoma przestrzeniami stanów.

Twierdzenie 2.18. *Niech dany będzie ergodyczny łańcuch Markowa $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, macierzą przejść \mathbf{P} i rozkładem początkowym ν . Załóżmy także, że łańcuch startuje ze stanu \mathbf{e}_1 ($\nu(\mathbf{e}_1) = 1$). Ponadto, niech dana będzie macierz \mathbf{C}_0 o wymiarach $n \times m$ (m odpowiada przestrzeni stanów $E^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_m^*\}$), taka że*

$$\begin{cases} \forall(\mathbf{e}_i \in E) & \mathbf{C}_0(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m^*) = 1, \\ \forall(\mathbf{e}_i^* \in E^*) & \mathbf{C}_0(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i^*) = 1, \\ \forall(\mathbf{e}_i^* \neq \mathbf{e}_m^*) & \mathbf{C}_0(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i^*) = 0, \end{cases}$$

oraz $\text{rank } \mathbf{C}_0 = m$. Wtedy istnieje macierz \mathbf{C}_0^{-1} o wymiarach $m \times n$ będąca lewostronną odwrotnością macierzy \mathbf{C}_0 . Niech

$$\mathbf{C}_0^{-1} \overleftarrow{\mathbf{P}} \mathbf{C}_0 \geq 0, \quad (42)$$

gdzie $\overleftarrow{\mathbf{P}}$ jest macierzą przejść łańcucha Markowa odwrotnego do \mathbf{X} oraz $\mathbf{C}_0^{-1} \overleftarrow{\mathbf{P}} \mathbf{C}_0 \geq 0$ oznacza, że wszystkie elementy macierzy $\mathbf{C}_0^{-1} \overleftarrow{\mathbf{P}} \mathbf{C}_0$ są nieujemne. Wtedy istnieje łańcuch Markowa Strong Stationary Dual $\mathbf{X}^* = \{X_t^*, t \geq 0\}$ z przestrzenią stanów E^* , rozkładem początkowym ν^* , takim że $\nu^*(\mathbf{e}_1^*) = 1$ oraz linkiem następującej postaci

$$\Lambda = \text{diag}(\pi \mathbf{C}_0)^{-1} \mathbf{C}_0^T \text{diag}(\pi).$$

Wówczas macierz przejść łańcucha dualnego wyraża się następującym wzorem

$$\mathbf{P}^* = \Lambda \mathbf{P} \Lambda^{-1} = (\text{diag}(\pi \mathbf{C}_0) \mathbf{C}_0^{-1} \overleftarrow{\mathbf{P}} \mathbf{C}_0 (\text{diag}(\pi \mathbf{C}_0))^{-1})^T, \quad (43)$$

gdzie $\text{diag}(\pi)$ jest macierzą diagonalną z wektorem π na głównej przekątnej.

Uwaga 2.4. Dla $E^* = E$ macierz \mathbf{C}_0 jest kwadratowa, a warunek (42) oznacza dokładnie \downarrow -Möbius monotoniczność łańcucha odwróconego w czasie (por. [11]).

Przekształcając równanie (43) otrzymujemy

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{C}_0 \mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0)^{-1})^T \overleftarrow{\mathbf{P}}^T (\mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0) \mathbf{C}_0^{-1})^T.$$

Następnie, korzystając z równania (41) mamy

$$\mathbf{P}^* = \underbrace{(\mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0)^{-1} \mathbf{C}_0^T \mathbf{diag}(\pi))}_{\Lambda} \mathbf{P} \underbrace{(\mathbf{diag}(\pi)^{-1} (\mathbf{C}_0^{-1})^T \mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0))}_{\Lambda^{-1}}.$$

Twierdzenie 2.18 wskazuje więc w jaki sposób szukać łańcuchów Strong Stationary Dual. Należy znaleźć macierz \mathbf{C}_0 , która spełnia założenia Twierdzenia 2.18, a następnie wyznaczyć macierze Λ oraz Λ^{-1} wiedząc, że

$$\begin{cases} \Lambda = \mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0)^{-1} \mathbf{C}_0^T \mathbf{diag}(\pi), \\ \Lambda^{-1} = \mathbf{diag}(\pi)^{-1} (\mathbf{C}_0^{-1})^T \mathbf{diag}(\pi \mathbf{C}_0). \end{cases} \quad (44)$$

Dodatkowo, gdy rozkład stacjonarny π łańcucha \mathbf{X}_t jest jednostajny, to

$$\begin{cases} \Lambda = \mathbf{diag}(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0)^{-1} \mathbf{C}_0^T, \\ \Lambda^{-1} = (\mathbf{C}_0^{-1})^T \mathbf{diag}(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0), \end{cases} \quad (45)$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest wektorem kolumnowym odpowiednich wymiarów złożonym z samych jedynek. W tym miejscu możemy już przedstawić ideę głównej części tej pracy, gdzie pokażemy jakie są wartości własne pewnego nietrywialnego procesu urodzin i śmierci. Zaprezentujemy łańcuch Markowa błędzenia losowego po hiperkostce, wyliczymy jego wartości własne, a następnie przy pomocy Twierdzenia 2.18 wykażemy, iż wspomniany proces narodzin i śmierci jest jego Strong Stationary Dual. Z kolei z Lematu 2.1 oba procesy mają te same wartości własne.

2.3 Teoria grafów

Definicja 2.26. Graf nieskierowany $\mathbf{G}(V, E)$ jest to para złożona z niepustego zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi E , będącego rodziną dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Ponadto, gdy graf \mathbf{G} nie zawiera pętli i krawędzi wielokrotnych to nazywamy go grafem nieskierowanym prostym.

Definicja 2.27. Iloczynem kartezjańskim grafów $\mathbf{G}_1(V_1, E_1)$ oraz $\mathbf{G}_2(V_2, E_2)$ nazywamy graf $\mathbf{G}_1 \square \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}(V_1 \times V_2, E)$, gdzie $V_1 \times V_2$ oznacza iloczyn kartezjański zbiorów V_1, V_2 oraz $E = \{\{(v_1, v_2), (u_1, u_2)\} : (v_1 = u_1 \wedge \{v_2, u_2\} \in E_2) \vee (v_2 = u_2 \wedge \{v_1, u_1\} \in E_1)\}$.

Grafem hiperkostki nazywamy graf nieskierowany prosty Q_n będący rzutem hiperkostki \mathcal{H}_n na płaszczyznę jednowymiarową. Graf Q_n składa się więc z 2^n wierzchołków oraz $2^{n-1}n$ krawędzi. Graf Q_n zdefiniować można także w sposób rekurencyjny [7].

Definicja 2.28. *Graf pełny K_n jest grafem nieskierowanym prostym złożonym z n wierzchołków, w którym każda para wierzchołków połączona jest krawędzią.*

Definicja 2.29. *Niech K_2 będzie grafem pełnym oraz niech $n \geq 2$, wtedy graf Q_n definiujemy następująco*

$$Q_1 = K_2,$$

$$Q_n = K_2 \square Q_{n-1}.$$

Definicja 2.30. *Niech dany będzie graf prosty $\mathbf{G}(V, E)$, gdzie $V = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Macierz sąsiedztwa \mathbf{A} grafu \mathbf{G} to macierz kwadratowa stopnia n , taka że*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} \in E, \\ 0, & \text{gdy } \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} \notin E. \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że gdy graf jest nieskierowany, to macierz sąsiedztwa tego grafu jest symetryczna.

Definicja 2.31. *Niech dane będą macierze $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ oraz $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}}$, wówczas iloczynem Kroneckera macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} nazywamy macierz klatkową $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ o wymiarach $mp \times nq$ następującej postaci*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1q} & \dots & a_{1n}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \dots & a_{11}b_{pq} & \dots & a_{1n}b_{p1} & \dots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \dots & a_{m1}b_{1q} & \dots & a_{mn}b_{11} & \dots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \dots & a_{m1}b_{pq} & \dots & a_{mn}b_{p1} & \dots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Można pokazać [8], że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.19. *Niech $\mathbf{G}_1(V_1, E_1)$ oraz $\mathbf{G}_2(V_2, E_2)$ będą nieskierowanymi grafami prostymi z macierzami sąsiedztwa odpowiednio \mathbf{A}_1 oraz \mathbf{A}_2 . Ponadto niech $|V_1| = n_1$ oraz $|V_2| = n_2$, wtedy macierz sąsiedztwa grafu $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \square \mathbf{G}_2$ wyraża się wzorem*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_{n_2} + \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_2, \quad (46)$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn Kroneckera oraz \mathbf{I}_n jest macierzą jednostkową rzędu n .

3 Wartości własne wybranych procesów narodzin i śmierci

3.1 Proste błądzenie losowe na $\mathbb{Z} \cap [0, N]$

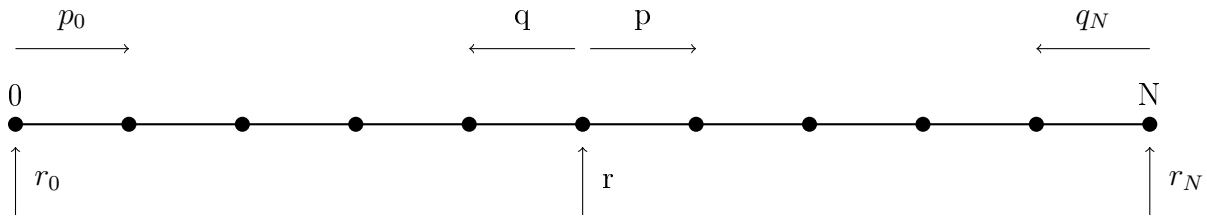
Proste błądzenie losowe na $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ jest szczególnym przypadkiem jednowymiarowego błądzenia przypadkowego na prostej.

Definicja 3.1. Niech X_1, X_2, \dots będą oznaczać ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie \mathcal{F} , takim że $0 \leq \mathcal{F}(0) < 1$. Wówczas proces stochastyczny $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, dla którego $S_0 = s_0$ oraz $S_n = s_0 + X_1 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n$ nazywamy jednowymiarowym błądzeniem losowym na prostej rzeczywistej, rozpoczynającym się w punkcie s_0 .

Tak zdefiniowane błądzenie losowe możemy interpretować jako poruszanie się punktu po prostej. Wówczas S_n oznacza położenie punktu w chwili n .

Definicja 3.2. Niech X_1, X_2, \dots będą oznaczać niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie \mathcal{F} , takim że $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$, $P(X_i = 0) = r$ oraz $p + q + r = 1$. Wówczas, proces stochastyczny $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, dla którego $S_0 = 0$ oraz $S_n = S_{n-1} + X_n$ nazywamy błądzeniem losowym na \mathbb{Z} o początku w zerze. Ponadto, gdy $p = q$ to błądzenie nazywamy prostym.

Zastanówmy się więc jak wyglądałoby takie błądzenie po pewnym podziorze liczb całkowitych $\mathbb{Z} \cap [0, N]$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Pomocna może okazać się poniższa ilustracja. Niech $N \in \mathbb{N}$ wtedy



Rysunek 1: Błądzenie losowe po zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$.

zbiór $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ składa się z $N + 1$ elementów rozłożonych równomiernie na odcinku $[0, N]$. Dla błądzenia losowego na zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ zastosowanie ma Definicja 3.2 z pewnymi odstępstwami na brzegach przedziału $[0, N]$. Gdy w pewnej chwili czasowej n znajdujemy się w stanie $S_n = 0$, to z prawdopodobieństwem r_0 zostaniemy w zerze lub z prawdopodobieństwem p_0 w chwili $n + 1$ znajdować się będziemy w jedynce. Analogicznie, gdy w chwili czasowej n znajdujemy się w stanie $S_n = N$, to z prawdopodobieństwem r_N zostaniemy w tym punkcie, lub z prawdopodobieństwem q_N w chwili $n + 1$ będziemy znajdować się w punkcie $N - 1$. Stany 0 oraz N są

stanami barierowymi, które wyznaczają obszar błędzenia losowego. Tak zdefiniowany proces stochastyczny błędzenia losowego na zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ tworzy łańcuch Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ i macierzą przejść $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1,\dots,N}$, gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} q & \text{dla } j = i - 1, i = 1, \dots, N - 1 \\ p & \text{dla } j = i + 1, i = 1, \dots, N - 1 \\ r & \text{dla } j = i, i = 1, \dots, N - 1 \\ p_0 & \text{dla } i = 0, j = 1 \\ r_0 & \text{dla } i = j = 0 \\ q_N & \text{dla } i = N, j = N - 1 \\ r_N & \text{dla } i = j = N \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Macierz \mathbf{P} jest więc następującej postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & r & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_N & r_N \end{bmatrix}. \quad (47)$$

3.1.1 Proste błędzenie losowe z ekranami odbijającymi

Definicja 3.3. *Rozważmy proces $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ prostego błędzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ z przestrzenią stanów $E = \{0, 1, \dots, N\}$ i macierzą przejść postaci (47). Proces ten nazywamy prostym błędzeniem losowym z ekranami odbijającymi, gdy $p_0 = q_N = 1$ oraz $r_0 = r_N = 0$. Ponadto, gdy $p = q$ błędzenie nazywamy symetrycznym.*

Często spotykanym przykładem prostego, symetrycznego błędzenia losowego z ekranami odbijającymi w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ jest proces stochastyczny opisany macierzą przejść postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2.8 proces ten ma $N+1$ różnych wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$, gdzie

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ \lambda_2 &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ &\vdots \\ \lambda_{N-1} &= \cos\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right) \\ \lambda_N &= 1 \\ \lambda_{N+1} &= -1. \end{aligned}$$

3.1.2 Proste błędzenie losowe z ekranami pochłaniającymi

Definicja 3.4. Rozważmy proces $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ prostego błędzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ z przestrzenią stanów $E = \{0, 1, \dots, N\}$ i macierzą przejść postaci (47). Proces ten nazywamy prostym błędzeniem losowym z ekranami pochłaniającymi, gdy $r_0 = r_N = 1$ oraz $p_0 = q_N = 0$.

Rozważmy szczególny przypadek symetrycznego błędzenia losowego z ekranami pochłaniającymi w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ opisany macierzą przejść postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & T_{N-1}(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \\ \hline & & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Jak widać wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{P} wyraża się wzorem

$$\det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)^2 \cdot \det T_{N-1} \left(\frac{1}{2}, -\lambda, \frac{1}{2} \right).$$

Stąd na mocy Twierdzenia 2.6 proces ten ma $N - 1$ wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ krotności jeden i jedną dwukrotną wartość własną λ_N , gdzie

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \\ \lambda_2 &= \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \\ &\vdots \\ \lambda_{N-1} &= \cos \left(\frac{(N-1)\pi}{N} \right) \\ \lambda_N &= 1 \end{aligned}$$

3.1.3 Proste błądzenie losowe z ekranami elastycznymi

Definicja 3.5. Rozważmy proces $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ prostego błądzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ z przestrzenią stanów $E = \{0, 1, \dots, N\}$ i macierzą przejść postaci (47). Proces ten nazywamy prostym błądzeniem losowym z ekranami elastycznymi, gdy $0 < r_0 = 1 - p_0 < 1$ oraz $0 < r_N = 1 - q_N < 1$.

Rozważmy szczególny przypadek symetrycznego błądzenia losowego z ekranami elastycznymi w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ opisany macierzą przejść postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1} \quad (48)$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2.9 proces ten ma $N + 1$ różnych wartości własnych $\lambda_0, \dots, \lambda_N$, gdzie

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{N+1} \right) \\ \lambda_2 &= \cos \left(\frac{2\pi}{N+1} \right) \\ &\vdots \\ \lambda_N &= \cos \left(\frac{N\pi}{N+1} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Ponadto, jesteśmy w stanie wyznaczyć analitycznie wektory własne tego procesu.

Twierdzenie 3.1. Niech dany będzie proces $\mathbf{S} = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ prostego błędzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ z ekranami elastycznymi określony na przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \dots, N\}$ z macierzą przejść taką jak w (48). Wówczas, wektor własny \vec{x}_l stowarzyszony z wartością własną $\lambda_l, l = 0, \dots, N$ jest następującej postaci

$$\vec{x}_l = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\frac{1}{2}l\pi}{N+1}\right) \\ \cos\left(\frac{(2-\frac{1}{2})l\pi}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(k-\frac{1}{2})l\pi}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(N-\frac{1}{2})l\pi}{N+1}\right) \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Dowód Twierdzenia 3.1.

Przeprowadzimy analogiczne rozumowanie jak w dowodzie Twierdzenia 2.6. Niech λ_l będzie wartością własną macierzy \mathbf{P} stowarzyszoną z wektorem własnym $\vec{x}_l = [x_1, x_2, \dots, x_{N+1}]^T, l = 0, \dots, N$. Wtedy, dla pary (λ_l, \vec{x}_l) spełniony jest układ złożony z $N + 1$ równań liniowych

$$(\mathbf{P} - \lambda_l \mathbf{I}) \vec{x}_l = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x_{k-1} - \lambda_l x_k + \frac{1}{2}x_{k+1} = 0, \\ x_0 = x_1, \\ n_{N+2} = x_{N+1}, \end{cases}$$

gdzie $k = 1, \dots, N+1$. Stąd, mnożąc przez 2 i podstawiając $k := k+1$, otrzymujemy jednorodne równanie różnicowe drugiego stopnia o stałych współczynnikach, wraz z warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} x_{k+2} - 2\lambda_l x_{k+1} + x_k = 0, \\ x_0 = x_1, \\ n_{N+2} = x_{N+1}, \end{cases} \quad (51)$$

gdzie $k = 0, \dots, N$. Rozwiązania równania (51) poszukujemy wśród funkcji potęgowych postaci $x_k = \alpha r^k$, gdzie $\alpha, r \in \mathbb{C}$ są pewnymi stałymi. Podstawiając tak określone rozwiązanie do równania (51) i dzieląc przez αr^k otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 - 2\lambda_l r + 1 = (r - r_1)(r - r_2) = 0, \quad (52)$$

którego pierwiastki są dane wzorem $r_1, r_2 = \lambda_l \pm \sqrt{(\lambda_l - 1)(\lambda_l + 1)}$. Wtedy, ogólne rozwiązanie rozważanego układu jest postaci

$$x_k = \begin{cases} \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k, & \text{gdzie } r_1 \neq r_2, \\ \alpha_1 r_0^k + \alpha_2 k r_0^k, & \text{gdzie } r_1 = r_2 = r_0, \end{cases} \quad (53)$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ są dowolnymi stałymi. Jako pierwszy rozważmy przypadek gdy $r_1 = r_2 = r_0$. Jak wiemy -1 nie jest wartością własną macierzy (48), zatem $\lambda_l = 1$ oraz $r_0 = 1$. Stąd rozwiązanie ogólne układu (51) jest postaci $x_k = \alpha_1 + \alpha_2 k$ oraz stałe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ można wyznaczyć z warunków brzegowych. Warunek $x_0 = x_1$ implikuje, że $\alpha_2 = 0$ oraz $x_k = \alpha_1$ dla $k = 1, \dots, N+1$. Kładąc $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy, że jeśli $\lambda_l = 1$ to $\vec{x}_l = \mathbf{1}_{N+1}$, gdzie $\mathbf{1}_{N+1}$ jest wektorem kolumnowym odpowiednich rozmiarów złożonym z samych jedynek. Rozważmy teraz przypadek, gdy $\lambda_l \neq 1$ i $r_1 \neq r_2$. Wówczas rozwiązanie ogólne układu (51) jest postaci $x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k, k = 1, \dots, N+1$. Ponadto, skoro r_1, r_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego (52), to $r_1 r_2 = 1 \Rightarrow r_2 = r_1^{-1}$. Stąd, $x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_1^{-k}, k = 1, \dots, N+1$ oraz z warunku początkowego $x_0 = x_1$ otrzymujemy $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_1^{-1} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 r_1$. Zatem rozwiązanie ogólne układu (51) jest postaci $x_k = \alpha_1 (r_1^k + r_1^{1-k}), k = 1, \dots, N+1$. Zauważmy, że $\alpha_1 \neq 0$, bo w przeciwnym przypadku $\vec{x}_l = \vec{0}$, co nie jest możliwe gdyż \vec{x}_l jest wektorem własnym. Warunek brzegowy $x_{N+2} = x_{N+1}$ implikuje, że

$$r_1^{N+2} + r_1^{-(N+1)} = r_1^{N+1} + r_1^{-N}. \quad (54)$$

Mnożąc obie strony równania (54) przez r_1^{N+1} otrzymujemy

$$r_1^{2N+3} + 1 = r_1^{2N+2} + r_1 \iff r_1^{2N+2} (r_1 - 1) = r_1 - 1, \quad (55)$$

a ponieważ $\lambda_l \neq 1$, to $r_1 \neq 1$. Stąd, $r_1^{2N+2} = 1$ oraz $r_1 = \sqrt[2N+2]{1} = e^{\frac{2\pi il}{2N+2}} = e^{\frac{\pi il}{N+1}}$. Mamy więc

$$x_k = \alpha_1 \left(e^{\frac{k\pi il}{N+1}} + e^{\frac{(1-k)\pi il}{N+1}} \right). \quad (56)$$

Kładąc $\alpha_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi il}{2N+2}}$ otrzymujemy

$$x_k = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{(k-\frac{1}{2})\pi il}{N+1}} + e^{-\frac{(k-\frac{1}{2})\pi il}{N+1}} \right) = \cos \left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi l}{N+1} \right), \quad (57)$$

co kończy dowód. \square

Wyznaczyliśmy wartości i wektory własne procesu prostego błędzenia losowego z ekranami elastycznymi w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$. Dzięki temu dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych dwóch stanów i, j możemy podać wprost prawdopodobieństwo warunkowe $P_{ij}(k)$ przejścia ze stanu i do stanu j w k krokach. W tym celu posłużymy się reprezentacją spektralną macierzy przejść tego procesu. Przedstawimy macierz \mathbf{P}^k w postaci (12). Zauważmy, że macierz \mathbf{P} jest symetryczna, stąd na mocy Twierdzenia 2.5 wektory własne są równe lewostronnym wektorom własnym macierzy \mathbf{P} . Rozważmy macierz $\mathbf{B}_l, l = 0, \dots, N$ wyrażoną wzorem (10)

$$\mathbf{B}_l = \vec{x}_l \vec{f}_l = \vec{x}_l \vec{x}_l^T.$$

Stąd

$$\mathbf{B}_l(i, j) = \vec{x}_l(i) \vec{x}_l(j) = \cos\left(\frac{(i-0.5)l\pi}{N+1}\right) \cos\left(\frac{(j-0.5)l\pi}{N+1}\right),$$

oraz

$$\mathbf{P}^k(i, j) = \sum_{l=0}^N \lambda_l^k \mathbf{B}_l(i, j) = \sum_{l=0}^N \cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)^k \cos\left(\frac{(i-0.5)l\pi}{N+1}\right) \cos\left(\frac{(j-0.5)l\pi}{N+1}\right).$$

3.2 Model urnowy Ehrenfestów

Rozważmy następujący model urnowy. Załóżmy, że mamy N cząstek i każdą wkładamy do pojemnika A lub B z jednakowym prawdopodobieństwem. Niech w chwili $n \geq 0$, k cząstek będzie w pojemniku A . Wtedy, w chwili $n+1$ wybierana jest jedna z N cząstek i przekłada do drugiego pojemnika. Zatem w chwili $n+1$ w pojemniku A mamy $k-1$ albo $k+1$ cząstek. Niech X_n oznacza liczbę cząstek w pojemniku A w chwili n , wtedy $P(i, j) = P(X_n = j | X_n = i)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe, że w chwili $n+1$ w pojemniku A będzie j kul jeśli w chwili wcześniej było w nim i kul. Tak zdefiniowany proces stochastyczny tworzy łańcuch Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ i macierzą przejść $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1,\dots,N}$, gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{dla } j = i-1, i = 2, \dots, N+1 \\ \frac{N-i}{N} & \text{dla } j = i+1, i = 1, \dots, N \\ 0 & \text{dla } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Macierz \mathbf{P} jest więc postaci

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{N} K_N.$$

Jest to znormalizowana macierz Kaca stopnia N . Zatem na mocy Twierdzenia 2.11 oraz Twierdzenia 2.3 proces urnowy Ehrenfestów posiada $N+1$ różnych wartości własnych $\lambda_0, \dots, \lambda_N$, gdzie

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 &= \frac{N-2}{N} \\ &\vdots \\ \lambda_{N-1} &= -\frac{N-2}{N} \\ \lambda_N &= -1 \end{aligned}$$

3.3 Model urnowy Bernoulliego Laplace'a

Rozważmy następujący model urnowy. N czarnych i N białych kul rozmieszczono w dwóch urnach A oraz B tak, że każda urna zawiera N kul. Niech w chwili $n \geq 0$, k czarnych kul znajduje się w pojemniku A . Wtedy, w chwili $n + 1$ z każdej urny wybieramy losowo po jednej kuli i dwie tak wybrane kule zamieniamy miejscami. Zatem w chwili $n + 1$ w pojemniku A mamy $k - 1$, k albo $k + 1$ czarnych kul. Niech X_n oznacza liczbę czarnych kul w pojemniku A w chwili n , wtedy $P(i, j) = P(X_n = j | X_n = i)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe, że w chwili $n + 1$ w pojemniku A będzie j czarnych kul jeśli w chwili wcześniej było w nim i kul tego koloru.

Tak zdefiniowany proces stochastyczny tworzy łańcuch Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ i macierzą przejść $\mathbf{P}_N = (p_{ij})_{i,j=0,1,\dots,N}$, gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{i}{N}\right)^2 & \text{dla } j = i - 1, i = 1, \dots, N \\ \left(\frac{N-i}{N}\right)^2 & \text{dla } j = i + 1, i = 0, \dots, N - 1 \\ 2\frac{i}{N}\left(\frac{N-i}{N}\right) & \text{dla } j = i, i = 0, \dots, N \\ 0 & \text{dla } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Macierz \mathbf{P}_N jest więc postaci

$$\mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{N}\right)^2 & \frac{2}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right) & \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{N}\right)^2 & \frac{4}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right) & \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 & \left(\frac{N-1}{N}\right)\frac{2}{N} & \left(\frac{1}{N}\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3.2. Niech dana będzie macierz

$$\hat{\mathbf{P}}_N = N^2 \mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} 0 & N^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 2(N-1) & (N-1)^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 4(N-2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 & (N-1)2 & 1^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Wartości własne macierzy $\hat{\mathbf{P}}_N$ są postaci

$$\lambda_k = N^2 - k(2N + 1 - k), \quad k = 0, \dots, N. \quad (59)$$

Udowodnimy powyższe twierdzenie wyznaczając miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego macierzy $\hat{\mathbf{P}}_N$.

Dowód Twierdzenia 3.2.

$$\det(\hat{\mathbf{P}}_N - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & N^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 2(N-1) - \lambda & (N-1)^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 4(N-2) - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 & (N-1)2 - \lambda & 1^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow k_i := k_i + k_{i-1}, i = 2, \dots, N+1$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda & \dots & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda \\ 1^2 & 2N - 1 - \lambda & N^2 - \lambda & \dots & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda \\ 0 & 2^2 & 4(N-1) - \lambda & \dots & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda & N^2 - \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 & N^2 - 1 - \lambda & N^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 & N^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow w_i := w_i - w_{i+1}, i = 1, \dots, N$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & N^2 + 1 - 2N & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 2N - 1 - \lambda & N^2 - 4(N-1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 4(N-1) - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 & -1 - \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 & N^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

\Downarrow

$$\left| \frac{\hat{\mathbf{P}}_{N-1} - \mathbf{I}_{N-1 \times N-1}}{C} \middle| \frac{\mathbf{0}_{N-1 \times 1}}{N^2 - \lambda} \right| = 0, \text{ gdzie}$$

$\mathbf{0}_{N \times 1}$ jest macierzą zerową, $\mathbf{I}_{N-1 \times N-1}$ jest macierzą jednostkową, oraz $C = [0 \dots 0 \ N^2]$.

\Downarrow na mocy Twierdzenia 2.10 prawdziwa jest następująca rekurencja

$$\left| \hat{\mathbf{P}}_{N-1} - \mathbf{I}_{N-1 \times N-1} \right| (N^2 - \lambda) = 0$$

oraz

$$\left| \hat{\mathbf{P}}_0 \right| = -\lambda.$$

Stąd na mocy Twierdzenia 2.4 otrzymujemy tezę. □

Zatem na mocy Twierdzenia 3.2 proces urnowy Bernoulliego Laplace'a posiada $N + 1$ różnych wartości własnych $\lambda_0, \dots, \lambda_N$, gdzie

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ \lambda_1 &= \frac{N-2}{N} \\ &\vdots \\ \lambda_i &= 1 - \frac{i(2N-i+1)}{N^2} \\ &\vdots \\ \lambda_N &= -\frac{1}{N} \end{aligned}$$

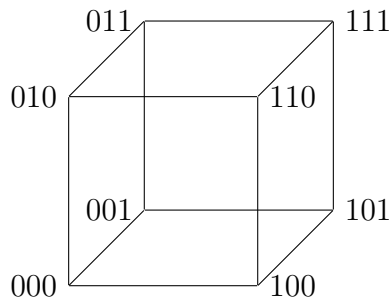
3.4 Błądzenie po hiperkostce i dualny proces narodzin i śmierci

Definicja 3.6. *Rozważmy przestrzeń \mathbb{R}^n . Hiperkostka \mathcal{H}_n o krawędziach długości $a > 0$ jest zbiorem punktów, których współrzędne (x_1, x_2, \dots, x_n) spełniają układ nierówności*

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq a \\ 0 \leq x_2 \leq a \\ \dots \\ 0 \leq x_n \leq a \end{cases}$$

Ponadto gdy $a = 1$, to hiperkostkę \mathcal{H}_n nazywamy jednostkową.

Tak zdefiniowana jednostkowa hiperkostka \mathcal{H}_n posiada 2^n wierzchołków o współrzędnych w zbiorze $\{0, 1\}^n$. Każdy wierzchołek \mathbf{e} hiperkostki \mathcal{H}_n może być przedstawiony poprzez se-



Rysunek 2: Hiperkostka jednostkowa \mathcal{H}_3 .

kwencję $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, gdzie $e_i \in \{0, 1\}$. Dwa wierzchołki $\mathbf{e}_1 = (e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1)$ oraz $\mathbf{e}_2 = (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2)$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n |e_i^1 - e_i^2| = 1$. Odległość pomiędzy wierzchołkami \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 wynosi $|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2| = \sum_{i=1}^n |e_i^1 - e_i^2|$ i jest to najmniejsza liczba krawędzi, które trzeba pokonać by przejść pomiędzy tymi dwoma wierzchołkami.

Definicja 3.7. Niech dany będzie proces stochastyczny $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $V = \{0, 1\}^d$ złożoną z 2^d wektorów $\mathbf{e}_i = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_d^i), i = 1, \dots, 2^d$, taki że:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \frac{1}{2d}, & \text{gdy } |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j| &= 1, \\ P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \frac{1}{2}, & \text{gdy } |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j| &= 0, \\ P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= 0, & \text{gdy } |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j| &\geq 2, \end{aligned}$$

gdzie $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku z wierzchołka \mathbf{e}_i do wierzchołka \mathbf{e}_j , to jest $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = P(X_{n+1} = \mathbf{e}_j | X_n = \mathbf{e}_i)$. Wówczas proces stochastyczny \mathbf{X} nazywamy procesem błądzenia losowego po hiperkostce.

Proces błądzenia losowego po hiperkostce nie jest procesem narodzin i śmierci, niemniej będzie on pomocny przy wyznaczaniu wartości własnych pewnego nowego procesu narodzin i śmierci. Zauważmy, że jeśli przestrzeń stanów $V = \{0, 1\}^d$ procesu błądzenia losowego po hiperkostce \mathcal{H}_d będzie uporządkowana zgodnie z porządkiem wierzchołków grafu hiperkostki Q_d to macierz przejść tego procesu jest postaci

$$\mathbf{P}_d = \frac{1}{2d}\mathbf{A}_d + \frac{1}{2}\mathbf{I}_{2^d}, \quad (60)$$

gdzie \mathbf{I}_{2^d} oznacza macierz jednostkową rzędu 2^d oraz \mathbf{A}_d jest macierzą sąsiedztwa grafu rozpiętego na wierzchołkach hiperkostki. Zgodnie z Twierdzeniem 2.4 aby wyznaczyć wartości własne procesu błądzenia losowego po hiperkostce wystarczy więc wyliczyć wartości własne macierzy sąsiedztwa \mathbf{A}_d . Ponadto, na mocy Twierdzenia 2.19 macierz sąsiedztwa \mathbf{A}_n grafu Q_n jest następującą macierzą klatkową

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{2^{n-1}} & \mathbf{I}_{2^{n-1}} \\ \hline \mathbf{I}_{2^{n-1}} & \mathbf{0}_{2^{n-1}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{0}_{2^{n-1}} \\ \hline \mathbf{0}_{2^{n-1}} & \mathbf{A}_{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{I}_{2^{n-1}} \\ \hline \mathbf{I}_{2^{n-1}} & \mathbf{A}_{n-1} \end{array} \right], \quad (61)$$

gdzie $\mathbf{0}_n$ jest macierzą zerową oraz \mathbf{I}_n jest macierzą jednostkową rzędu n .

Twierdzenie 3.3. Niech dany będzie graf Q_d rozpięty na wierzchołkach hiperkostki jednostkowej \mathcal{H}_d . Macierz sąsiedztwa \mathbf{A}_d grafu Q_d posiada $d + 1$ różnych wartości własnych λ_i wraz z krotnościami $n_i, i = 0, \dots, d$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -d, & n_0 &= \binom{d}{0} \\ \lambda_1 &= -d + 2, & n_1 &= \binom{d}{1} \\ &\vdots & & \\ \lambda_k &= -d + 2k, & n_k &= \binom{d}{k} \\ &\vdots & & \\ \lambda_d &= d, & n_d &= \binom{d}{d} \end{aligned}$$

Dowód Twierdzenia 3.3.

Macierz sąsiedztwa \mathbf{A}_d grafu Q_d jest macierzą klatkową postaci (61). Stąd otrzymujemy następującą zależność rekurencyjną

$$\det(\mathbf{A}_d - \lambda \mathbf{I}_{2^d}) = \det(\mathbf{A}_{d-1} + \mathbf{I}_{2^{d-1}} - \lambda \mathbf{I}_{2^{d-1}}) \det(\mathbf{A}_{d-1} - \mathbf{I}_{2^{d-1}} - \lambda \mathbf{I}_{2^{d-1}}). \quad (62)$$

Dowodziemy tezę Twierdzenia 3.3 poprzez indukcję względem d .

Sprawdzenie prawdziwości twierdzenia dla $d = 1$.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda_0 = -1, \lambda_1 = 1.$$

Zatem, dla $d = 1$ twierdzenie jest prawdziwe.

Założenie prawdziwości twierdzenia dla $d \geq 1$ i dowód prawdziwości dla $d + 1$.

$$\det(\mathbf{A}_{d+1} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}_d + \mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}) \det(\mathbf{A}_d - \mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}_d - (\lambda - 1)\mathbf{I}) \det(\mathbf{A}_d - (\lambda + 1)\mathbf{I})$$

Stąd na mocy Twierdzenia 2.4 wraz z założeniem indukcyjnym macierz \mathbf{A}_{d+1} posiada wartości własne λ_i^1, λ_i^2 wraz z krotnościami $n_i, i = 0, \dots, d$

$$\begin{aligned} \lambda_0^1 &= \lambda_0 - 1 = -d - 1, & n_0 &= \binom{d}{0} \\ &\vdots & & \\ \lambda_k^1 &= \lambda_k - 1 = -d - 1 + 2k, & n_k &= \binom{d}{k} \\ &\vdots & & \\ \lambda_d^1 &= \lambda_d - 1 = d - 1, & n_d &= \binom{d}{d} \\ \lambda_0^2 &= \lambda_0 + 1 = -d + 1, & n_0 &= \binom{d}{0} \\ &\vdots & & \\ \lambda_k^2 &= \lambda_k + 1 = -d + 1 + 2k, & n_k &= \binom{d}{k} \\ &\vdots & & \\ \lambda_d^2 &= \lambda_d + 1 = d + 1, & n_d &= \binom{d}{d} \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_i, i = 0, \dots, d$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A}_d . Zauważmy ponadto, że dla $k = 0, \dots, d - 1$

$$\lambda_k^2 = -d + 1 + 2k = -d + 1 - 2 + 2 + 2k = -(d + 1) + 2(k + 1) = \lambda_{k+1}^1.$$

Dodatkowo dla $k = 1, \dots, d$ prawdziwa jest równość

$$\binom{d+1}{k} = \binom{d}{k} + \binom{d}{k-1}.$$

Zatem, macierz \mathbf{A}_{d+1} posiada $d+2$ różne wartości własne λ_i^* wraz z krotnościami n_i^* , $i = 0, \dots, d+1$

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= \lambda_0^1 = -(d+1), & n_0^* &= \binom{d}{0} = \binom{d+1}{0} \\ \lambda_1^* &= \lambda_1^1 + \lambda_0^2 = -(d+1) + 2, & n_1^* &= \binom{d}{1} + \binom{d}{0} = \binom{d+1}{1} \\ &\vdots & & \\ \lambda_k^* &= \lambda_k^1 + \lambda_{k-1}^2 = -(d+1) + 2k, & n_k^* &= \binom{d}{k} + \binom{d}{k-1} = \binom{d+1}{k} \\ &\vdots & & \\ \lambda_d^* &= \lambda_d^1 + \lambda_{d-1}^2 = d-1, & n_d^* &= \binom{d}{d} + \binom{d}{d-1} = \binom{d+1}{d} \\ \lambda_{d+1}^* &= \lambda_d^2 = d+1, & n_{d+1}^* &= \binom{d}{d} = \binom{d+1}{d+1}. \end{aligned}$$

Co kończy dowód. □

Macierz \mathbf{P}_d procesu błądzenia losowego po hiperkostce \mathcal{H}_d jest postaci (46). Na mocy Twierdzenia 2.4 oraz Twierdzenia 3.3 macierz \mathbf{P}_d posiada więc $d+1$ różnych wartości własnych λ_i wraz z krotnościami n_i , $i = 0, \dots, d$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & n_0 &= \binom{d}{0} \\ \lambda_1 &= \frac{1}{d}, & n_1 &= \binom{d}{1} \\ &\vdots & & \\ \lambda_k &= \frac{k}{d}, & n_k &= \binom{d}{k} \\ &\vdots & & \\ \lambda_d &= 1, & n_d &= \binom{d}{d}. \end{aligned}$$

3.4.1 Nowy proces narodzin i śmierci

Rozważmy macierz kwadratową $\mathbf{P}^* = [\mathbf{P}^*(k, l)]_{\substack{k=0, \dots, d \\ l=0, \dots, d}}$ następującej postaci

$$\mathbf{P}^*(k, l) = \begin{cases} \frac{(d-k) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}}, & \text{dla } k \geq 1, l = k-1, \\ \frac{(k+1) \sum_{i=0}^{k+1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} & \text{dla } k < d, l = k+1, \\ \frac{d-1}{2d}, & \text{dla } k < d, l = k, \\ 1, & \text{dla } k = d, l = k, \\ 0, & \text{dla } |l - k| > 1. \end{cases} \quad (63)$$

Macierz \mathbf{P}^* jest więc trójdzielna. Sprawdźmy, że \mathbf{P}^* jest macierzą stochastyczną, $\forall k, l \in \mathbb{Z}_{d+1}$ $\mathbf{P}^*(k, l) \geq 0$ wystarczy zatem pokazać, że $\forall k \in \mathbb{Z}_{d+1}$ $\sum_{l=0}^d \mathbf{P}^*(k, l) = 1$. Rozważmy następujące przypadki

1. $k = 0$

$$\sum_{l=0}^d \mathbf{P}^*(0, l) = \mathbf{P}^*(0, 0) + \mathbf{P}^*(0, 1) = \frac{d-1}{2d} + \frac{\sum_{i=0}^1 \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^0 \binom{d}{i}} = \frac{d-1}{2d} + \frac{d+1}{2d} = 1,$$

2. $0 < k < d$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^d \mathbf{P}^*(k, l) &= \mathbf{P}^*(k, k-1) + \mathbf{P}^*(k, k) + \mathbf{P}^*(k, k+1) \\ &= \frac{(d-k) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} + \frac{d-1}{2d} + \frac{(k+1) \sum_{i=0}^{k+1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \\ &= \frac{d-1}{2d} + \frac{(d-k) \left[\sum_{i=0}^k \binom{d}{i} - \binom{d}{k} \right] + (k+1) \left[\sum_{i=0}^k \binom{d}{i} + \binom{d}{k+1} \right]}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \\ &= \frac{d-1}{2d} + \frac{d+1}{2d} + \frac{(k+1) \binom{d}{k+1} - (d-k) \binom{d}{k}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} = 1 + \frac{\frac{k+1}{1} \frac{d!}{(k+1)!(d-k-1)!} - \frac{d-k}{1} \frac{d!}{k!(d-k)!}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \\ &= 1 + \frac{\frac{d!-d!}{k!(d-k-1)!}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} = 1, \end{aligned}$$

3. $k = d$

$$\sum_{l=0}^d \mathbf{P}^*(d, l) = \mathbf{P}^*(d, d) = 1.$$

Macierz \mathbf{P}^* jest trójdzielna i stochastyczna, jest więc macierzą przejść pewnego nowego procesu narodzin i śmierci $\mathbf{X}^* = \{X_n^*, n \geq 0\}$.

Twierdzenie 3.4. Niech dany będzie proces narodzin i śmierci $\mathbf{X}^* = \{X_n^*, n \geq 0\}$ określony na przestrzeni stanów $E = \{0, 1, \dots, d\}$ z macierzą przejść \mathbf{P}^* postaci (63). Proces \mathbf{X}^* ma $d+1$ różnych wartości własnych $\lambda_i = \frac{i}{d}, i = 0, \dots, d$.

Udowodnimy powyższe twierdzenie wykorzystując teorię łańcuchów Strong Stationary Dual. Pokażemy, że proces \mathbf{X}^* z macierzą przejść \mathbf{P}^* postaci (63) jest łańcuchem Strong Stationary

Dual procesu \mathbf{X} błędzenia po hiperkostce \mathcal{H}_d . Ponadto, jak wykazaliśmy wcześniej proces \mathbf{X} posiada $d + 1$ różnych wartości własnych. Stąd, na mocy Lematu 2.1 oba procesy mają te same wartości własne.

Dowód Twierdzenia 3.4.

Niech dana będzie hiperkostka jednostkowa \mathcal{H}_d ze zbiorem wierzchołków $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2^d}\} = \{0, 1\}^d$. Niech $\mathbf{S} : E \rightarrow \mathbb{Z}_{d+1}$ będzie funkcją określoną na zbiorze E wyrażoną wzorem

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}) = \sum_{i=0}^d \mathbf{e}(i),$$

gdzie $\mathbf{e}(i)$ oznacza i -tą współrzędną wierzchołka $\mathbf{e} \in E$. Ponadto, niech funkcja $\underline{k} : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}_{d+1}^+$ będzie dana wzorem

$$\underline{k}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \min \{k : \mathbf{e}_i(k) \neq \mathbf{e}_j(k)\}.$$

Wtedy, przy pomocy funkcji $\mathbf{S}(\mathbf{e})$ i \underline{k} , zdefiniować możemy silny porządek liniowy \prec określony na zbiorze E

$$\forall \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \quad \mathbf{e}_i \prec \mathbf{e}_j \iff \mathbf{S}(\mathbf{e}_i) < \mathbf{S}(\mathbf{e}_j) \vee (\mathbf{S}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{S}(\mathbf{e}_j) \wedge \mathbf{e}_i(\underline{k}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = 1).$$

Podzielmy zbiór E na $d + 1$ rozłącznych podzbiorów

$$E_k = \{\mathbf{e}_i \in E : \mathbf{S}(\mathbf{e}_i) = k\}, k = 0, \dots, d,$$

wtedy, niech \mathbf{e}_{max}^k oraz \mathbf{e}_{min}^k oznaczają odpowiednio maksymalny i minimalny element zbioru E_k względem porządku liniowego \prec .

Rozważmy proces stochastyczny $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 0\}$ błędzenia losowego po hiperkostce jednostkowej \mathcal{H}_d określony na przestrzeni stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2^d}\} = \{0, 1\}^d$ uporządkowanej zgodnie z porządkiem liniowym \prec , startujący z wierzchołka $\mathbf{e}_1 = (0, \dots, 0)^T$ (to znaczy $\nu = (1, 0, \dots, 0)^T$). Niech $\mathbf{P} = [P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]_{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in E}$ będzie macierzą przejść tego procesu z prawdopodobieństwami $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ określonymi w Definicji 3.7. Zauważmy, że

$$\forall \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in E \quad P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = P(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \iff \mathbf{P} = \mathbf{P}^T,$$

stąd macierz $\mathbf{P} = \overleftarrow{\mathbf{P}}$ jest podwójnie stochastyczna oraz na mocy Twierdzenia 2.17 rozkład stacjonarny π macierzy \mathbf{P} jest jednostajny. Weźmy macierz $\mathbf{C}_0 = [C_0(\mathbf{e}_i, k)]_{\substack{i=1, \dots, 2^d \\ k=0, \dots, d}}$ taką, że $C_0(\mathbf{e}_i, k) = \mathbb{1}(\mathbf{S}(\mathbf{e}_i) \leq k)$. Wtedy \mathbf{C}_0 jest macierzą schodkową taką, że $\text{rank } \mathbf{C}_0 = d + 1$ i na mocy Twierdzenia 2.16 istnieje macierz $\mathbf{C}_0^{-1} = [C_0^{-1}(k, \mathbf{e}_i)]_{\substack{k=0, \dots, d \\ i=1, \dots, 2^d}}$ będąca lewostronną odwrotnością macierzy \mathbf{C}_0 (macierz \mathbf{C}_0^{-1} nie jest określona jednoznacznie). Niech $C_0^{-1}(k, \mathbf{e}_i) = \mathbb{1}(\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{max}^k) - \mathbb{1}(k < d) \wedge (\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{min}^{k+1})$, wtedy $\forall k, l \in \mathbb{Z}_{d+1}$

$$(\mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_0)(k, l) = \sum_{\mathbf{e} \in E} \mathbf{C}_0^{-1}(k, \mathbf{e}) \mathbf{C}_0(\mathbf{e}, l) = \sum_{\mathbf{e} \in E} [\mathbb{1}(\mathbf{e} = \mathbf{e}_{max}^k) - \mathbb{1}(k < d) \wedge (\mathbf{e} = \mathbf{e}_{min}^{k+1})] \mathbb{1}(\mathbf{S}(\mathbf{e}) \leq l)$$

$$= \mathbb{1}(\mathbf{S}(\mathbf{e}_{max}^k) \leq l) - \mathbb{1}(\mathbf{S}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}) \leq l) = \mathbb{1}(k \leq l) - \mathbb{1}(k+1 \leq l),$$

więc

$$(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{C}_0)(k, l) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } k = l \\ 0, & \text{gdy } k \neq l \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{C}_0 = \mathbf{I}_{d+1},$$

gdzie \mathbf{I}_{d+1} jest macierzą jednostkową stopnia $d+1$. Tak określona macierz \mathbf{C}_0^{-1} jest więc lewostronną odwrotnością macierzy \mathbf{C}_0 . Sprawdźmy także, że zachodzi warunek (42), to jest $\forall k, l \in \mathbb{Z}_{d+1}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}_0)(k, l) &= \sum_{\mathbf{e} \in E} \mathbf{C}_0^{-1}(k, \mathbf{e}) \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \mathbf{P}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, l) \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{max}^k, \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, l) - \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, l) &= \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq l} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{max}^k, \bar{\mathbf{e}}) - \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) \geq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z każdego wierzchołka \mathbf{e} hiperkostki \mathcal{H}_d wychodzi dokładnie d krawędzi oraz, jeśli $\mathbf{S}(\mathbf{e}) = k$, to k z tych krawędzi prowadzi do k wierzchołków ze zbioru E_{k-1} , a $d-k$ pozostałe krawędzie prowadzą do $d-k$ wierzchołków ze zbioru E_{k+1} . Stąd,

1. dla $l \leq k-1$

$$\forall \bar{\mathbf{e}} \in E : \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq l \quad \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) = 0, \text{ zatem } (\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}_0)(k, l) \geq 0,$$

2. dla $l = k$

$$(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}_0)(k, k) = \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{max}^k, \bar{\mathbf{e}}) - \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2d} - \frac{k+1}{2d} = \frac{d-1}{2d} \geq 0,$$

3. dla $l = k+1$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}_0)(k, k+1) &= \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k+1} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{max}^k, \bar{\mathbf{e}}) - \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2d} + \frac{d-k}{2d} - \frac{1}{2} + \frac{k+1}{2d} = \\ \frac{d-(k+1)}{2d} &\geq 0, \end{aligned}$$

4. dla $l \geq k+2$

$$(\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}_0)(k, l) = \sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq l} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{max}^k, \bar{\mathbf{e}}) - \mathbf{P}(\mathbf{e}_{min}^{k+1}, \bar{\mathbf{e}}) = 1 - 1 = 0.$$

Warunek (42) jest spełniony, a więc na mocy Twierdzenia 2.18 istnieje łańcuch Strong Stationary Dual, względem procesu błędzenia po hiperkostce \mathcal{H}_d , określony na przestrzeni stanów $E^* = \{0, 1, \dots, d\}$ z macierzą przejść \mathbf{P}^* , taką że zachodzi równość (39) oraz Λ i Λ^{-1} takie jak w (45). Zauważmy, że $(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0)(k) = \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}$, $k = 0, \dots, d$, stąd

$$\Lambda(k, \mathbf{e}) = \sum_{l=0}^d \left(\mathbf{diag}(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0)^{-1} \right)(k, l) \mathbf{C}_0(\mathbf{e}, l) = \frac{1}{(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0)(k)} \mathbf{C}_0(\mathbf{e}, k) = \frac{\mathbf{C}_0(\mathbf{e}, k)}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}}, \quad (64)$$

oraz analogicznie

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{e}, k) = \sum_{l=0}^d \mathbf{C}_0^{-1}(l, \mathbf{e}) \left(\mathbf{diag}(\mathbf{1}^T \mathbf{C}_0) \right)(l, k) = \mathbf{C}_0^{-1}(k, \mathbf{e}) \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}. \quad (65)$$

Dlatego macierz \mathbf{P}^* wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*(k, l) &= \sum_{\mathbf{e} \in E} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \Lambda(k, \bar{\mathbf{e}}) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}) \right] \Lambda^{-1}(\mathbf{e}, l) = \sum_{\mathbf{e} \in E} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \frac{\mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, k)}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}) \right] \mathbf{C}_0^{-1}(l, \mathbf{e}) \sum_{i=0}^l \binom{d}{i} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \sum_{\mathbf{e} \in E} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, k) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}) \right] \mathbf{C}_0^{-1}(l, \mathbf{e}) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E} \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, k) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^l) - \mathbf{C}_0(\bar{\mathbf{e}}, k) \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{l+1}) \right] \\
&= \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^l) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{l+1}) \right].
\end{aligned}$$

Stąd

1. dla $k \geq 1$ oraz $l \leq k - 2$

$$\mathbf{P}^*(k, l) = \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^l) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{l+1}) \right] = \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} (1 - 1) = 0,$$

2. dla $k \geq 1$ oraz $l = k - 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*(k, k - 1) &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^{k-1}) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^k) \right] = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{k}{2d} \right) \\
&= \frac{(d - k) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}},
\end{aligned}$$

3. dla $l = k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*(k, k) &= \frac{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^k) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{k+1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{k}{2d} - \frac{k+1}{2d} \mathbf{1}(k < d) = \begin{cases} \frac{d-1}{2d}, & \text{dla } k < d, \\ 1, & \text{dla } k = d, \end{cases}
\end{aligned}$$

4. dla $k < d$ oraz $l = k + 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(k, k+1) &= \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^{k+1}) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{k+2}) \right] = \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left(\frac{k+1}{2d} - 0 \right) \\ &= \frac{(k+1) \sum_{i=0}^{k+1} \binom{d}{i}}{2d \sum_{i=0}^k \binom{d}{i}}, \end{aligned}$$

5. dla $l \geq k + 2$

$$\mathbf{P}^*(k, l) = \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} \left[\sum_{\bar{\mathbf{e}} \in E: \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}) \leq k} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{max}^l) - \mathbf{P}(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_{min}^{l+1}) \right] = \frac{\sum_{i=0}^l \binom{d}{i}}{\sum_{i=0}^k \binom{d}{i}} (0 - 0) = 0.$$

Macierz \mathbf{P}^* jest więc taka jak w (63). Dowiedliśmy zatem, że proces \mathbf{X}^* z macierzą przejść \mathbf{P}^* jest łańcuchem Strong Stationary Dual procesu \mathbf{X} błędzenia po hiperkostce \mathcal{H}_d . Ponadto, jak wykazaliśmy wcześniej proces \mathbf{X} posiada $d + 1$ różnych wartości własnych. Zatem, na mocy Lematu 2.1 proces narodzin i śmierci \mathbf{X}^* posiada $d + 1$ różnych wartości własnych $\lambda_i = \frac{i}{d}, i = 0, \dots, d$. Co kończy dowód. \square

4 Podsumowanie

W niniejszej pracy podjęliśmy tematykę wartości własnych procesów narodzin i śmierci z czasem dyskretnym. Przedstawiliśmy klasyczne, dobrze znane z literatury, przykłady tychże procesów i wyliczyliśmy analitycznie ich wartości własne.

W przypadku procesu prostego błędzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$ wskazaliśmy ścisły związek z teorią macierzy Toeplitza. Posługując się teorią równań różnicowych wyznaczyliśmy ogólną postać wartości i wektorów własnych trójdzielnych macierzy Toeplitza, a następnie sformułowaliśmy i udowodniliśmy dwa twierdzenia dotyczące pseudo macierzy Toeplitza, które mają bezpośrednie zastosowanie do interesującej nas podklasy macierzy stochastycznych. Rozważyliśmy trzy, różne ze względu na charakter ekranów, rodzaje procesów prostego błędzenia losowego w zbiorze $\mathbb{Z} \cap [0, N]$: błędzenie losowe z ekranami odbijającymi, błędzenie losowe z ekranami pochłaniającymi oraz błędzenie losowe z ekranami elastycznymi.

Następnie omówiliśmy dwa modele urnowe: model urnowy Ehrenfestów oraz model urnowy Bernoulliego Laplace'a. Pokazaliśmy także, że macierz przejść procesu urnowego Ehrenfestów jest znormalizowaną macierzą Kaca.

W głównej części pracy zdefiniowaliśmy zupełnie nowy proces narodzin i śmierci \mathbf{X}^* , dla którego wartości własne nie są powszechnie znane. Następnie posłużyliśmy się procesem \mathbf{X} błędzenia losowego po hiperkostce, który nie jest procesem narodzin i śmierci do wyznaczenia wartości własnych procesu \mathbf{X}^* . Wskazaliśmy związek pomiędzy macierzą przejść procesu \mathbf{X} oraz macierzą sąsiedztwa grafu hiperkostki i wyliczyliśmy ich wartości własne. Ostatecznie, posługując się teorią łańcuchów strong stationary dual dowiedliśmy, że proces \mathbf{X}^* jest łańcuchem dualnym procesu \mathbf{X} , a co za tym idzie \mathbf{X}^* oraz \mathbf{X} mają te same wartości własne.

Naturalną kontynuacją tejże pracy byłoby uzupełnienie opisanych procesów o wektory własne, a także podanie innych przykładów procesów narodzin i śmierci. Niezwykle interesujące mogłyby się okazać poszukiwania łańcuchów Strong Stationary Dual podanych procesów narodzin i śmierci. Jak bowiem udowodniono [3] łańcuch dualny do procesu narodzin i śmierci jest również procesem narodzin i śmierci określonym na tej samej przestrzeni stanów.

Literatura

- [1] Aldous D., Diaconis P., Strong Uniform Times and Finite Random Walks, *Advances in Applied Mathematics*, 8, 69-97, (1987)
- [2] Cinlar E., *Introduction to Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 364-382, (1975)
- [3] Diaconis P., Fill J. A., Strong stationary times via a new form of duality, *The Annals of Probability*, 18, 1483-1522, (1990)
- [4] Diaconis P., Saloff-Coste L., Separation cut-offs for birth and death chains, *The Annals of Applied Probability*, 16, 2098-2122, (2006)
- [5] Feller W., *Wstęp do Rachunku Prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 315-345, (1977)
- [6] Gollan H. W., Lempken W., An easy linear algebra approach to the eigenvalues of the Bernoulli-Laplace model of diffusion, *Archiv der Mathematik*, 64, 150-153, (1995)
- [7] Harary F., A survey of the theory of hypercube graphs, *Computers & Mathematics with Applications*, 15, 277-289, (1988)
- [8] Kaveh A., Rahami H., A unified method for eigendecomposition of graph products, *Communications in numerical methods in engineering*, 21, 377-388, (2006)
- [9] Keilson J., *Markov Chain Models - Rarity and Exponentiality*, Springer, New York, (1979)
- [10] Kulkarni D., Schmidt D., Tsui S., Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 297, 63-80, (1999)
- [11] Lorek P., Szekli R., Strong stationary duality for Möbius monotone Markov chains, *Queueing Systems*, 71, 79-95, (2011)
- [12] Lorek P., Szekli R., Strong Stationary Duality for Möbius monotone Markov chains: examples, (2014)
- [13] Lorek P., Sharp antiduality and Möbius monotonicity
- [14] Meyer C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 489-703, (2000)

- [15] Ye K., Lim L., Every matrix is a product of Toeplitz matrices, Foundations of Computational Mathematics, (2014)