Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 07.10.2016

Lista nr 1

Paweł Lorek

Uwaga: Są to zadania z pierwszej części listy z wykładu *"Symulacje i algorytmiczne zastosowania łancuchów Markowa"* z sem. II 2015/2016.

1. Niech T będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne. Pokaż, że $ET = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k)$.

2. Udowodnij następujący

   Lemat 1 (Nierówność Markowa) *Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Wtedy $\forall r > 0$*
   $$P(X \geq r) \leq \frac{EX}{r}$$

3. Udowodnij następujący

   Lemat 2 (Nierówność Czebyszewa) *Niech X będzie zmienną losową o średniej $\mu < \infty$ i wariancji $\sigma^2 < \infty$. Wtedy $\forall r > 0$*
   $$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

4. Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $1 + x \leq e^x$

5. Udowodnij następujący

   Lemat 3 (Nierówność Chernoffa) *Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0)$. Niech $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $\mu = ES = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi*
   $$P(S > (1+\varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}\right)^{\mu}$$
   oraz
   $$P(S < (1-\varepsilon)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{1-\varepsilon}}\right)^{\mu}$$

6. Pokaż, iż poprzednie zadanie implikuje
   $$P(S < (1-\varepsilon)\mu) \leq e^{\frac{-\mu^2\varepsilon^2}{2}}$$

7. Udowodnij:
   $$\forall (1 \leq k \leq n): \qquad \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \tag{0.1}$$

Kolejne zadania dotyczą następującego schematu: wrzucamy n kul "losowo" do n urn (tzn. z prawd. $1/n$ do każdej z urn).

8. Pokaż, że

$$Pr[\text{urna nr } i \text{ jest pusta}] \approx \frac{n}{e}$$

(możesz użyć przybliżenia $(1 - 1/n)^n \approx \frac{1}{e}$)

9. Pokaż, że

$$Pr[\text{urna nr } i \text{ ma dokładnie } k \text{ kul}] \leq \frac{1}{k!}$$

10. Pokaż, że

$$Pr[\text{urna nr } i \text{ ma co najmniej } k \text{ kul}] \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k$$

11. Udowodnij następujące twierdzenie: dla $k = \dfrac{3 \ln n}{\ln \ln n}$

$$Pr[\text{każda z urn ma co najwyżej} k \text{ kul}] \geq 1 - \frac{1}{n}$$