Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 28.10.2016

Lista nr 4

Paweł Lorek

1. Niech $F(x)$ będzie dystrybuantą. Uogólnioną dystrybuantę odwrotną definiujemy jako:
$$F^{-1}(t) = \inf\{x : t \leq F(x)\}, \qquad \forall t \in [0,1].$$
Pokaż, że w ogólności
   - $F(F^{-1}(t)) \leq t$, dla $t \in [0,1]$
   - $F^{-1}(F(x)) \geq x$, dla $x \in \mathbf{R}$

   Wskaż przypadki, w których $F(F^{-1}(t)) \neq t$ oraz $F^{-1}(F(x)) \neq x$.

2. Niech $U \sim U(0,1)$. Pokaż, że $X = \tan(\pi(U - 1/2))$ ma rozkład Cauchyego, tj. gęstość $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

3. Rozkład Gumbela z parametrami $\mu \in \mathbf{R}$ oraz $\sigma > 0$ ma dystrybuantę $F(x; \mu, \sigma) = \exp(-e^{-(x-\mu)/\sigma})$. Pokaż, iż dla $U \sim U(0,1)$ zmienna $X = -\log(-\log(U))$ ma rozkład Gumbela z parametrami $\mu = 0, \sigma = 1$. Jak z X uzyskać zmienną o rozkładzie Gumbela z dowolnymi parametrami $\mu, \sigma > 0$?

4. W algorytmie do generowania zmiennej o rozkladzie $N(0,1)$ metodą eliminacji używaliśmy zmiennej losowej Exp(1), tj. o gęstości $g(y) = e^{-y}\mathbf{1}(y \geq 0)$. Przedstaw wersję algorytmu, w którym używalibyśmy rozkladu Exp(λ), $\lambda > 0$, tj. o gęstości $g_2(y) = \lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}(y \geq 0)$. Dla jakiego λ prawdopodobieństwo akceptacji jest największe?

5. Podaj (i wyjaśnij) metodę eliminacji do symulowania zmiennej losowej z rozkładu $X \sim N(0,1)$ przy pomocy zmiennej losowej Y z rozkładu Cauchyego. Wskaż optymalne c.

   Czy można symulować metodą eliminacji zmienną losową z rozkładu Cauchyego za pomocą zmiennej losowej z rozkładu normalnego?