Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 18.11.2016

Lista nr 5

Paweł Lorek

1. (Metoda zmiennych kontrolnych). Chcemy obliczyć $I = EY$. Symulujemy $Y_1, \ldots, Y_n$, niezależne replikacje Y. Przypomnijmy, iż estymator CMC (Crude Monte Carlo) definiujemy jako $\hat{Y}^{CMC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ (mamy: $Var\hat{Y}^{CMC} = \frac{1}{n}VarY$). Teraz symulujemy dodatkowo drugą zmienną losową X tzn. symulujemy $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$, gdzie X_i i Y_i są/mogą być zależne. Załóżmy, iż znamy EX. Niech $\hat{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Definiujemy
$$\hat{Y}_n^{CV} = \hat{Y}_n^{CMC} + c(\hat{X}_n - EX)$$
Oczywiście mamy nadal $E\hat{Y}_n^{CV} = EY$ oraz
$$Var(\hat{Y}_n^{CV}) = \frac{1}{n}Var(Y_1 + cX_1)$$
   a) Pokaż, że $Var(\hat{Y}_n^{CV})$ jest najmniejsze dla $c = -\frac{Cov(Y_1, X_1)}{Var(X_1)}$.
   b) Pokaż, że dla powyższego c mamy $Var(\hat{Y}_n^{CV}) = Var(\hat{Y}_n^{CMC})(1 - \rho^2)$, gdzie $\rho = corr(Y_1, X_1)$

2. (Metoda zmiennych kontrolnych: Estymacja π c.d.) Niech $Y_i = 4\mathbf{1}(U_{i,1}^2 + U_{i,2}^2 \leq 1)$, gdzie $U_{i,j}, i = 1, 2, j = 1, \ldots n$ są iid $U(0, 1)$. Wówczas $\hat{Y}^{CMC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest estymatorem liczby π o wariancji $Var(\hat{Y}^{CMC}) = \frac{1}{n}2.6968$. Wylicz wariancję estymatora zmiennych kontrolnych $\hat{Y}_n^{CV}$ biorąc za zmienną kontrolną $X_i = \mathbf{1}(U_{i,1} + U_{i,2} > 2)$.

3. (Metoda zmiennych antytetycznych). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania
$$I = \int_0^1 e^x dx,$$
biorąc $Y_i = e^{U_i}$, a za zmienną antytetyczną biorąc $X_i = e^{1-U_i}$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{*}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$?

4. (Metoda zmiennych antytetycznych: Estymacja π c.d.). Zastosuj metodę zmiennych antytetycznych do oszacowania
$$I = \int_0^1 4\sqrt{1 - x^2}dx$$

(skądinąd wiemy, iż to jest π) biorąc $Y_{2i-1} = 4\sqrt{1-U_i^2}$ oraz $Y_{2i} = 4\sqrt{1-(1-U_i)^2}$ oraz $\hat{Y}_n^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^*$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$?