Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 25.11.2016

Lista nr 6

Paweł Lorek

1. Losujemy X z rozkładem Pois(λ). Następnie rzucamy X razy (niezależnie) niesymetryczną monetą: z prawdopodobieństwem p otrzymujemy Orła, z prawdopodobieństwem $1-p$ otrzymujemy Reszkę. Niech X_1 oznacza liczbę otrzymanych Orłów, a X_2 liczbę otrzymanych Reszek (oczywiście $X = X_1 + X_2$. Pokaż, iż X_1 ma rozkład Pois$(p\lambda)$, X_2 ma rozkład Pois$((1-p)\lambda)$ oraz, że zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne.

2. Jeśli $U_1, \ldots, U_n$ są iid o rozkładzie $U[0,t]$, to rozkład łączny ma gęstość

$$f_{U_1,\ldots,U_n}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^n} & \text{jeśli } 0 \le x_i \le t,\ i = 1,\ldots,n \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

Jeśli przez $W_1 \le W_2 \le \ldots \le W_n$ oznaczymy posortowane $U_1,\ldots,U_n$, to łączna gęstość wektora $(W_1,\ldots,W_n)$ jest następująca

$$f_{W_1,\ldots,W_n}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n} & \text{jeśli } 0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le t \\ 0 & \text{wp.p.} \end{cases}$$

Teraz, niech $N(t)$ będzie $PPois(\lambda)$ (jednorodnym procesem Poissona z parametrem λ), oznaczmy punkty zgłoszeń przez $A_1, A_2, \ldots$. Warunkując, iż $N(t) = n$ pokaż, że wektor $(A_1,\ldots,A_n)$ ma taki sam rozkład jak $(W_1,\ldots,W_n)$.

3. (Losowanie istotnościowe) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

biorąc X o gęstości $\tilde{f}(x) = re^{-x}$ (dobierając r tak, by $\tilde{f}$ była gęstością na $(0,1)$). Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{IS}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).

4. (Losowanie istotnościowe) Podaj procedurę losowania istotnościowego dla estymacji

$$I = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

dla $\alpha = 3/4$ biorąc X takie jak w poprzednim zadaniu (tj. o gęstości $\tilde{f}(x) = re^{-x}$), przyjmując $k(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ oraz $f(x) = 1$. Jaka jest procentowa redukcja wariancji $\hat{Y}_n^{IS}$ w stosunku do $\hat{Y}_n^{CMC}$? (użyj komputera do wyliczenia odpowiednich całek).