Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo	16.12.2016
Lista nr 7	
Paweł Lorek	

1. Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz z rozkładem początkowym $\nu = (1, 0, 0, 0)$

   a) Oblicz ν^3

   b) Oblicz ν^n ("zgadując" rozwiązanie i udowadniając indukcyjnie, że jest ono poprawne).

2. (Podobne do tego co było na wykładzie). Model pogody Gothenburga. Rozważmy uproszczony model pogody: rozważamy tylko dwa stany: "deszcz" i "słońce". Po dniu deszczowym następuje dzień deszczowy z prawd. 0.75, natomiast po dniu słonecznym następuje dzień słoneczny z prawd. również 0.75. Oznaczmy przestrzeń stanów $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, gdzie $\mathbf{e}_1$ oznacza dzień deszczowy, a $\mathbf{e}_2$ dzień słoneczny. Wtedy macierz przejść wygląda następująco:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Załóżmy, że $\mu = (0, 1)$.

   a) Oblicz ν^2.

   b) Oblicz ν^n stosując diagonalizację macierzy $\mathbf{P}$ (możesz do tego posłużyć się komputerem i przedstawić wynik).

3. Dla poprzedniego przykładu znajdź/wskaż rozkład stacjonarny π, policz $d_{TV}(\nu\mathbf{P}^k, \pi)$ oraz podaj mixing time $\tau(\varepsilon) = \min\{n \geq 0 : d_{TV}(\nu\mathbf{P}^k, \pi) \leq \varepsilon\}$.

4. Dla łańcuchów z zadań 1 oraz 2 wskaż poprawne funkcje updatujące.

5. *Proces urodzin i śmierci z dwoma odbijającymi barierami.* Niech X będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{0, 1, \ldots, N\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 \ldots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ 0 & \ldots & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$. Znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Wsk: Łańcuch jest odwracalny.

6. Znajdź rozklad stacjonarny łańcucha Markowa X na przestrzeni $\mathbb{E} = \{1, 2, 3\}$ o macierzy przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

7. Normę całkowitego wahania między miarami ν i μ na $\mathbb{E}$ zdefiniowaliśmy jako $d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}} |\mu(\mathbf{e}) - \nu(\mathbf{e})|$. Pokaż, że

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subseteq \mathbb{E}} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

gdzie $\mu(A) := \sum_{\mathbf{e} \in A} \mu(\mathbf{e})$.

8. Rozważmy następujący łańcuch Markowa X: Niech $a, b \geq 2$ będą liczbami całkowitymi. Przestrzeń stanów:

$$\mathbb{E} = \{(x, y) : x \in \{0, \ldots, a-1\}, y \in \{0, \ldots, b-1\}\}.$$

Dynamika łańcucha jest nastepująca: Będąc w stanie (x, y) w chwili n, w następnej chwili łańcuch albo jest w stanie $((x+1) \bmod a, y)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ albo w stanie $(x, (y+1) \bmod b)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

   - Pokaż, że łańcuch X jest nieredukowalny
   - Pokaż, że łańcuch X jets nieokresowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(a, b) = 1$