

1. Ustalmy liczbę całkowitą $n > 0$. Rozważmy też nieskończony ciąg prób Bernoulliego (zer i jedynek) $b_1, b_2, \dots$. W chwili i patrzymy na okno rozmiaru n : $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+n-1}$. Niech X_i oznacza długość bloku samych jedynek występujących z prawej str. okna (tak, że żadne 0 tam się nie pojawia). Oto przykład ($n = 6$):

czas	ciąg	X_k
k	$\dots 1(001011)110101\dots$	2
$k+1$	$\dots 10(010111)10101\dots$	3
$k+2$	$\dots 100(101111)0101\dots$	4
$k+3$	$\dots 1001(011110)101\dots$	0
$k+4$	$\dots 10010(111101)01\dots$	0

- (a) $\{X_i\}_{i \geq 1}$ jest łańcuchem Markowa. Podaj przestrzeń stanów $\mathbb{E}$, macierz przejścia $\mathbf{P}$ i znajdź rozkład stacjonarny.
- (b) Znajdź coupling i oszacuj $d_{TV}(\nu \mathbf{P}^k, \pi)$.
2. Rozważmy łańcuch Markowa X na $\mathbb{E} = \{0, 1\}^d$ z macierzą

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{e}') = \begin{cases} \frac{1}{d+1} & \text{jeśli } \mathbf{e}' = \mathbf{e} \pm s_i \text{ lub } \mathbf{e}' = \mathbf{e}, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$, $e_i \in \{0, 1\}$ oraz $s_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (jedynka na pozycji i).

Innymi słowy, dynamika jest następująca

- Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{d+1}$ nic nie rób.
- W przeciwnym razie, z prawd. $\frac{1}{d+1}$ zmień jedną ze współrzędnych na przeciwną.

(a*) Znajdź (rozsądny) coupling.

(b*) Znajdź/oszacuj mixing (poprzez nierówność couplingową)

Uwaga: na wykładzie pokazana była wersja, gdzie z prawd. $1/2$ nic się nie działo, a w p.p. losowana była jedna ze wsp. i zmieniana na przeciwną.