Wprowadzenie do symulacji i metod Monte Carlo 13.01.2017

Lista nr 9

Paweł Lorek

1. Dla $G = (V, E)$ podzbiór wierzchołków $I \subset V$ nazywsa się *zbiorem niezależnym* w G jeśli żadne dwa wierzchołki z I nie są połączone krawędzią w G. Niech $\mathcal{I}(G)$ oznacza wszystkie zbiory niezależne w G. Podaj przykład łańcucha, którego rozkład stacjonarny jest rozkładem jednostajnym na $\mathcal{I}(G)$.

Model Isinga. Dany jest graf $G = (V, K)$. Model Isinga jest to sposób wybrania losowego elementu z $\{-1, +1\}^V$.

Taki element $\mathbf{e} \in \{-1, +1\}^V$ nazywamy *konfiguracją* , dla ustalonej konfiguracji $\mathbf{e}(v) \in \{-1, +1\}$ jest wartością spinu w wierzchołku v.

Model Isinga, jest to wybranie losowego elementu $Y \in \{-1, +1\}^V$, który elementowi $\mathbf{e}$ przypisuje prawdopodobieństwo:

$$P(Y = \mathbf{e}) = \pi_{G,\beta}(\mathbf{e}) \equiv \pi(\mathbf{e}) = \frac{1}{Z_{G,\beta}} exp(-\beta H(\mathbf{e})), \quad \text{gdzie} \quad H(\mathbf{e}) = \sum_{\tilde{k}=(v_1,v_2)\in K} \mathbf{e}(v_1)\mathbf{e}(v_2).$$

$H(\mathbf{e})$ nazywane jest *energią* konfiguracji, zaś parametr $\beta \geq 0$ odwrotnością temperatury.

2. Rozważmy model Isinga na grafie $G = (V, K)$. Ustalmy wierzchołek v. Niech $\mathbf{e} \in \{-1, +1\}^{V \setminus \{v\}}$ będzie jakąś ustaloną konfiguracją przypisującą wartości -1 lub $+1$ wszystkich wierzchołkom *oprócz* wierzchołka v.

   Przez $\mathbf{e}^+$ oznaczmy konfigurację, która wierzchołkowi v przypisuje wartość $+1$, a na pozostałych wierzchołkach ma tą samą wartość co konfiguracja $\mathbf{e}$. Analogicznie, $\mathbf{e}^-$ jest konfiguracją, która wierzchołkowi v przypisuje wartość -1, a pozostałym te same wartości co konfiguracja $\mathbf{e}$. Pokaż, że

$$\frac{\pi(\mathbf{e}^+)}{\pi(\mathbf{e}^-)} = exp(2\beta(k_+(v, \mathbf{e}) - k_-(v, \mathbf{e}))),$$

   gdzie $k_+(v, \mathbf{e})$ oznacza liczbę sąsiadów wierzchołka v, które mają spin $+1$, a $k_-(v, \mathbf{e})$ liczbę tych sąsiadów, które mają spin -1.

3. Rozważmy model Isinga na grafie $G = (V, K)$ (oznaczenia jak w zad. 2). Załóżmy, że konfiguracja Y zostałą wybrana zgodnie z rozkładem π. Wyobraźmy sobie, że patrzymy na konfigurację $Y(V \setminus \{v\})$, ale ukrywamy spin $Y(v)$ i otrzymujemy $Y(V \setminus \{v\}) = \mathbf{e}$. Jesteśmy zainteresowani w warunkowym rozkładzie wartości spinu w v. Pokaż, że

$$\pi(Y(v) = +1 \mid Y(V \setminus \{v\}) = \mathbf{e}) = \frac{exp(2\beta(k_+(v, \mathbf{e}) - k_-(v, \mathbf{e})))}{1 + exp(2\beta(k_+(v, \mathbf{e}) - k_-(v, \mathbf{e})))}$$

4. Rozważmy model Isinga na grafie $G = (V, K)$ (oznaczenia jak w zad. 2). Ustalmy porządek na konfiguracjach: dla dwóch konfiguracji $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in \{-1, +1\}$ mamy $\mathbf{e} \preceq \mathbf{e}'$ jeśli $\mathbf{e}(w) \leq \mathbf{e}'(w)$ dla każdego $w \in V \setminus \{v\}$. Pokaż, że jeśli $\mathbf{e} \preceq \mathbf{e}'$, to

$$\pi(Y(v) = +1 \mid Y(V \setminus \{v\}) = \mathbf{e}) \;\leq\; \pi(Y(v) = +1 \mid Y(V \setminus \{v\}) = \mathbf{e}')$$